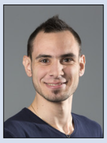
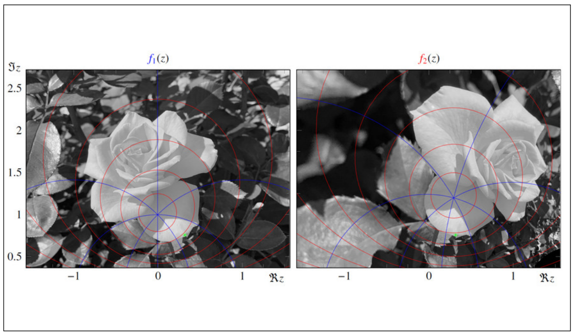


Roy
Seitz

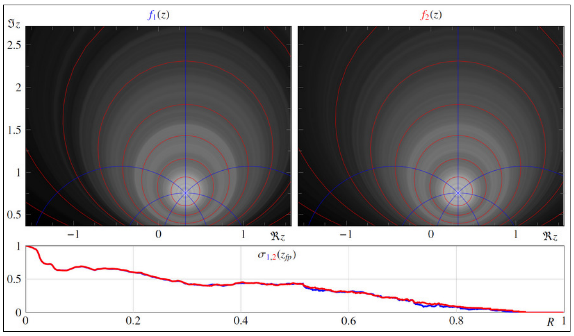
Student	Roy Seitz
Examinator	Prof. Dr. Andreas Müller
Themengebiet	Sensor, Actuator and Communication Systems

Hyperbolische Bildregistrierung

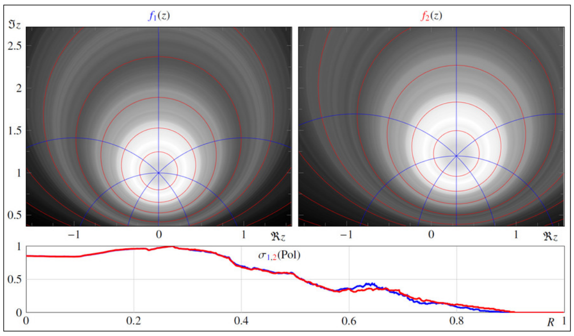
Faktorisierung durch Méndez-Transformationen



Original-Bild und verschobene, rotierte Version, je mit hyperbolischem Netz aus Strahlen und konzentrischen Kreisen.
Eigene Darstellung



Fixpunkt-Algorithmus: Finde einen gemeinsamen Punkt, so dass die Signaturen beider Bilder übereinstimmen.
Eigene Darstellung



Translations-Algorithmus: Bestimme einen Punkt im Original-Bild. Finde den Bildpunkt mit gleicher Signatur.
Eigene Darstellung

Ausgangslage: Das Registrierungsproblem zweier Bilder für euklidische Geometrien und kommutative Gruppen kann mittels Fourier-Theorie relativ einfach gelöst werden. In früheren Arbeiten an der HSR wurden die Méndez-Transformationen entdeckt. Sie erwiesen sich als wertvolles Werkzeug in der nicht-kommutativen Bildregistrierung, namentlich bei der Untersuchung von verdrehten und verschobenen Bildern in der euklidischen Ebene, sowie bei verdrehten Bildern auf Kugeloberflächen. Dabei kommt die Mittelung der Bilder über eine kompakte Untergruppe der möglichen Transformationen zur Anwendung. In zwei Dimensionen sind dies Kreise. Rotative Transformationen entfallen dadurch und das Problem vereinfacht sich um eine Dimension, welche im Anschluss einzeln gelöst werden kann.
Die Theorie der Méndez-Transformationen ist allerdings wesentlich mächtiger und lässt sich erweitern: Méndez-Transformationen sind anwendbar bei Bildern auf lokalkompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten unter lokalkompakten, unimodularen Gruppen an Transformationen. Das Registrierungsproblem auf elliptischen und euklidischen Geometrien in zwei Dimensionen ist bereits gelöst. Der Weg für höhere Dimensionen ist ausgekundschaftet. Die hyperbolische Geometrie in zwei oder mehr Dimensionen verbleibt jedoch und ist Gegenstand dieser Arbeit.

Vorgehen: Nach einem Einblick in die hyperbolische Geometrie und der Gruppentheorie wird die Theorie der Méndez-Transformationen aufgegriffen. Anhand von Bildern in der Poincaré-Halbebene wird gezeigt, wie Méndez-Transformationen auf diese angewendet werden können. Dafür wird die projektive spezielle lineare Gruppe PSL(2,R) analysiert, welche mittels Möbius-Transformationen als Isometrien auf der Poincaré-Halbebene wirken.
Der bestehende Algorithmus zu den Méndez-Transformationen benötigt jedoch die Existenz eines Fixpunktes, welche unter PSL(2,R) im Allgemeinen nicht gegeben ist. Ein zweiter Algorithmus, welcher lediglich die transitive Wirkung der Gruppe auf der Mannigfaltigkeit benötigt, löst dieses Problem. Zudem zeigt die Arbeit, wie die Méndez-Transformationen als Signaturen interpretiert werden können. Diese erlauben, Bildpunkte miteinander zu identifizieren. Der Vergleich der Signaturen wiederum kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen: mittels eines Masses für die Ähnlichkeit oder den Unterschied. Zusätzlich werden die beiden Algorithmen auf ihre Robustheit gegen Rauschen untersucht.

Ergebnis: Die Theorie der Méndez-Transformationen wurde erfolgreich auf die Poincaré-Halbebene angewendet. Die beiden Algorithmen finden die gesuchte Transformation zwischen zwei Bildern zuverlässig, auch bei stark verrauschten Bildern. Der benötigte Rechenaufwand ist bei beiden Algorithmen ähnlich.
Folglich ist es möglich, das Registrierungsproblem in allen zweidimensionalen, homogenen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten relativ effizient zu lösen. Für höherdimensionale hyperbolische Räume liefern die Méndez-Transformationen einen Lösungsansatz im Tangentialraum. Über die Exponential-Abbildung lässt sich die Lösung dann auf die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements ausdehnen. Diese umfasst aufgrund der Zusammenziehbarkeit hyperbolischer Räume den gesamten Raum.