Wichtige mathematische Formeln

die man auswendig wissen und anwenden können muss

Schreibregeln

- Der Multiplikationspunkt muss nicht geschrieben werden.
- Es gibt nie zwei Operationszeichen nacheinander: $x \cdot -y$ ist also nicht gestattet; korrekt ist $x \cdot (-y)$.
- Potenzen und Wurzeln haben höchste Priorität, dann folgen Produkte und Quotienten, schiesslich Summen und Differenzen: $-3^2 = -9$ aber $(-3)^2 = 9$

Rechnen mit Polynomen

$$x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

$$-(x + y) = -x - y \qquad -(x - y) = -x + y$$

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \qquad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Binomischer Lehrsatz

Für alle $a, b \in \boldsymbol{R}$:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Höhere Potenzen nach dem Pascalschen Dreieck.

Bruchrechnen

Erweitern und Kürzen:

$$\frac{z}{n} = \frac{z \cdot x}{n \cdot x} \qquad -\frac{z}{n} = \frac{-z}{n} = \frac{z}{-n}$$

Addition und Subtraktion:

Die Operanden müssen zuerst durch Erweitern auf den *kleinsten* gemeinsamen Nenner gebracht werden.

$$\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 + z_2}{n} \qquad \frac{z_1}{n} - \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 - z_2}{n}$$

Multiplikation und Division

$$\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{n_1 \cdot n_2} \qquad \frac{\left(\frac{z_1}{n_1}\right)}{\left(\frac{z_2}{n_2}\right)} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$$

Potenzen

Für alle $a, b > 0$ und $n, m \in \boldsymbol{R}$:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Wurzeln

$\sqrt[n]{a}$ ist für $n \in \boldsymbol{N} \backslash \{0,1\}$ wie folgt definiert:

- Wenn n ungerade ist, dann ist $\sqrt[n]{a}$ ist jene Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.
- Wenn n gerade ist, dann ist $\sqrt[n]{a}$ ist jene nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.
- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Für alle $a \in \boldsymbol{R}$ und ungeraden $n, m \in \boldsymbol{N} \backslash \{0,1\}$:

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Für alle geraden $n \in \boldsymbol{N} \backslash \{0,1\}$:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

Für alle $x \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ und $n, m \in \boldsymbol{N} \backslash \{0,1\}$:

$$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x = a^{x/n}$$

Wenn alle beteiligten Wurzeln definiert sind, gilt:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Logarithmen

Sei a eine positive, von 1 verschiedene Zahl. Dann ist $\log_a(x)$ jener Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten. $\log_a(x)$ ist nur für postive x definiert.

$$\lg(x) = \log_{10}(x) \qquad \mathrm{ld}(x) = \mathrm{lb}(x) = \log_2(x)$$

$\ln(x) = \log_{e(x)}$ $\qquad$ $e = 2.71828\ldots$ ist die Eulersche Zahl.

Sofern alle beteiligten Logarithmen, Potenzen und Wurzeln definiert sind gilt

$$\log(1) = 0$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^y) = y\log(x) \qquad \log(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log(x)}{n}$$

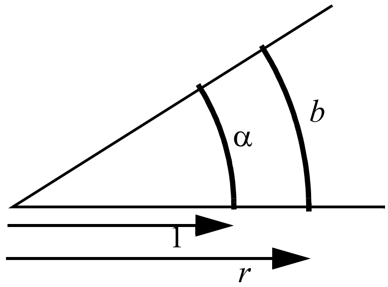
Dabei bedeutet $\log$ jeweils den Logarithmus zu einer beliebigen, aber innerhalb der Regel festen Basis.

Trigonometrie

Bogenmass

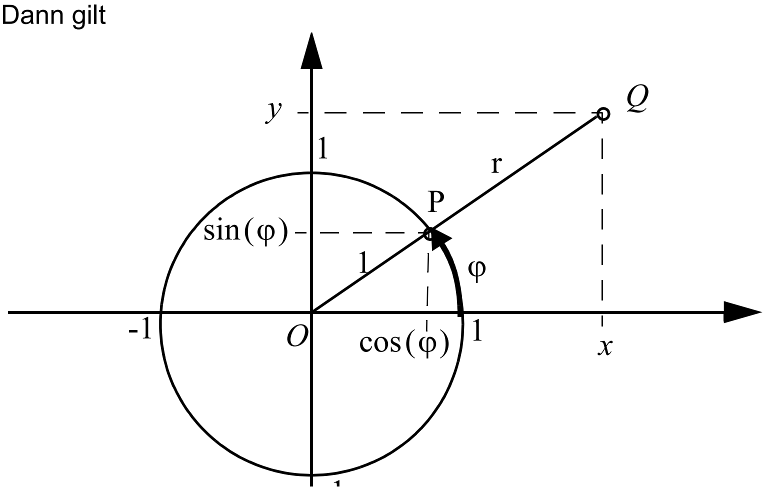
Winkel werden für analytische Zwecke im Bogenmass gemessen. Dieses ist definiert als das Verhältnis zwischen der Bogenlänge und dem Radius eines Kreises, dessen Zentrum im Scheitel des Winkels liegt.

$$\alpha = \frac{b}{r}$$



Definition der trigonometrischen Funktionen

Wir betrachten einen beliebigen Punkt Q in in der Ebene mit den kartesichen Koordinaten (x, y), dem Abstand r vom Ursprung und dem Richstungwinkel φ. Letzterer wird von der postitiven Abszissenachse aus gemessen und als postiv gewertet, wenn man im Gegenuhrzeigersinn dreht, als negativ, wenn man im Uhrzeigersinn dreht. Dann gilt



$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \qquad \cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \text{ für } \varphi \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \cot(\varphi) = \frac{x}{y} \text{ für } \varphi \neq n\pi \text{ mit } n \in \mathbf{Z}.$$

Für einen Punkt P auf dem Einheitskreis ($r = 1$) erhält man speziell:

- Die Bogenlänge ist gleich dem Winkel im Bogenmass,
- Die Abszisse ist gleich dem Cosinus des Richtungswinkels,
- Die Ordinate ist gleich dem Sinus des Richtungswinkels.

Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionen desselben Winkels

Wenn die Tangense und Kotangense definiert sind, kann man sie durch Sinus und Kosinus ausdrücken

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

Trigonometrischer Pythagorassatz

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Quadrantenrelationen

Periodizität

Für $n \in \boldsymbol{Z}$ gilt

$$\sin(x + n2\pi) = \sin(x) \qquad \cos(x + n2\pi) = \cos(x)$$

$$\tan(x + n\pi) = \tan(x) \qquad \cot(x + n\pi) = \cot(x)$$

Vorzeichenregeln

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

Komplementbeziehungen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x) \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

Gleichungsregeln

Man darf bei einer Gleichung

- beidseitig dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren,
- mit derselben, von 0 verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren,
- beidseitig quadrieren, wobei Fremdslösungen entstehen können (die Lösungen der Schlussgleichung müssen daher in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt und überprüft werden.),
- beidseitig die Wurzel ziehen, falls keine der beiden Seiten negativ ist,
- beide Seiten als Exponenten zur selben positiven Basis (jedoch nicht von 1) nehmen,
- beidseitig zur selben Basis logarithmieren, falls beide Seiten positiv sind.

Quadratische Gleichungen

Für die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung für Unbekannte *x*

$ax^2 + bx + c = 0$ wobei die Koeffizienten *a*, *b* und *c* die Unbekannte nicht enthalten

sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac \geq 0$, so gilt $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- wenn hingegen $D < 0$ ist, so hat die Gleichung keine Lösung.

Ungleichungsregeln

Man darf bei einer Ungleichung ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$)

- beidseitig dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren,
- mit derselben, *positiven* Zahl multiplizieren oder dividieren,
- mit derselben, *negativen* Zahl multiplizieren oder dividieren, wenn man gleichzeitig das Vergleichszeichen umdreht.

Man beachte ferner:

- Wenn $a \geq 0$ ist, dann ist

  $x^2 > a$ gleichbedeutend mit $x > \sqrt{a}$ oder $x < -\sqrt{a}$ und

  $x^2 < a$ gleichbedeutend mit $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.