

Konstruktionselemente aus Kunststoff: Kontaktmechanik von Kunststoffrollen

# Zylindrische Laufmantelrolle mit partieller Abstützung

Zur Berechnung statisch belasteter oder langsam laufender zylindrischer Kunststoffrollen, deren Laufmantel nicht über die ganze Rollenbreite abgestützt ist, können verlässliche Formeln für Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, Kontaktfläche, Abplattung und Vergleichsspannung angegeben werden. Sie knüpfen an jene an, die für eine vollständige Abstützung entwickelt worden sind [1].

Laufmantelrollen, deren Laufmantel oder Bandage aus Kunststoff bestehen, werden in der Regel eingesetzt, wenn es darum geht, eine wirtschaftliche Fertigung mit vorteilhaften Betriebseigenschaften wie geringem Schallpegel, hoher mechanischer Dämpfung, gutem Federverhalten und hoher Verschleissfestigkeit zu kombinieren [2].

Die Kontaktmechanik solcher Laufmantelrollen wird einerseits durch die mechanischen Eigenschaften des Kunststoff-Laufmantels bestimmt, andererseits aber auch durch die Geometrie der Kontaktflächen zueinander. Im einfachsten Fall stützt sich der Laufmantel auf seiner Innenseite vollständig auf der Nabe ab, und die kontaktmechanischen Größen Kontaktdruck, Kontaktflächen-grösse und Abplattung können mit bereits publizierten Berechnungsformeln hinreichend genau erfasst werden [1]. Wenn der Laufmantel jedoch nur über einem Teil seiner achsialen Ausdehnung auf der Nabe abgestützt ist, werden die kontaktmechanischen Zusammenhänge komplizierter, wie die nachstehenden Ausführungen zeigen. Für diesen in der Praxis nicht seltenen Anwendungsfall (Abb. 1) sind bislang keine Berechnungsansätze bekannt geworden.

## Problemstellung

Um die erwähnte Lücke in den verfügbaren Berechnungsformeln zu schliessen, stellte sich die Aufgabe, die Kontaktmechanik zylindrischer Kunststoffrollen, deren Laufmantel nur partiell abgestützt ist, zu untersuchen und aus den Ergebnissen praktikable Formeln abzuleiten. Die

Untersuchung [3] beschränkt sich auf statische oder quasistatische Belastungen, wie sie für die Berechnung der statischen Tragfähigkeit, des Verformungsverhaltens im Stillstand und der Federwirkung bei langsamer Bewegung von Bedeutung sind, aber auch für die Beurteilung des Anfahrwiderstands.

## Vorgehen

Die Bearbeitung der Problemstellung erfolgte auf bewährte Weise in einer sinnvollen Kombination theoretisch-analytischer, experimenteller und rechnerisch-numerischer Untersuchungen mit folgenden Schritten:

- Identifikation der massgeblichen Parameter des Problems anhand qualitativer Überlegungen;
- Durchführung von rechnerisch-numerischen Analysen mit der Finite Elemente Methode (FEM) unter gezielter Variation der Parameter zwecks Herausarbeitung der geltenden Gesetzmässigkeiten;
- Experimentelle Bestätigung der Ergebnisse;

- Erarbeiten von mathematisch möglichst einfachen, aber hinreichend genauen Berechnungsformeln für den maximalen Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, die Grösse der entstehenden Kontaktfläche und die Rollenabplattung, also die Verschiebung des Rollenzentrums in Richtung Unterlage (Abb. 2).

## Voraussetzungen und Idealisierungen

Die Überlegungen basieren auf einer Reihe von Voraussetzungen und Idealisierungen:

- a) der Laufmantel ist von zylindrischer Form gegebenenfalls mit Anfassung bzw. Rundungsradius zu den Stirnflächen (Abb. 3);
- b) der Laufmantel ist lediglich auf einem Teil seiner achsialen Ausdehnung (Rollenbreite) auf der Nabe abgestützt;
- c) der Kunststoff des Laufmantels verhält sich linear viskoelastisch, d.h. die zeitabhängige Werkstoffsteifigkeit, beschrieben durch den Kriech-

**Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz**, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im NDS Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz

**Dipl.-Ing. Mario Studer**, wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil

Die Autoren widmen diesen Fachbeitrag Professor Dr. Wolfgang Kaiser zu seinem 70. Geburtstag.

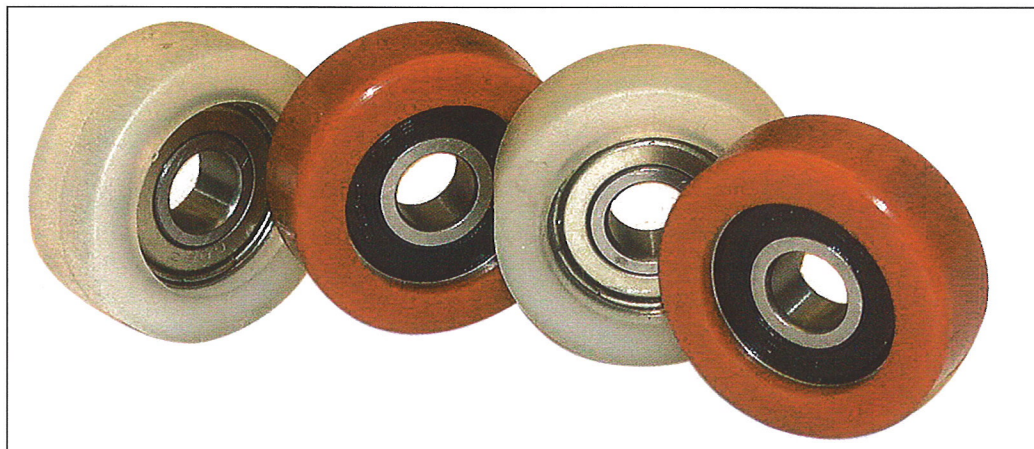
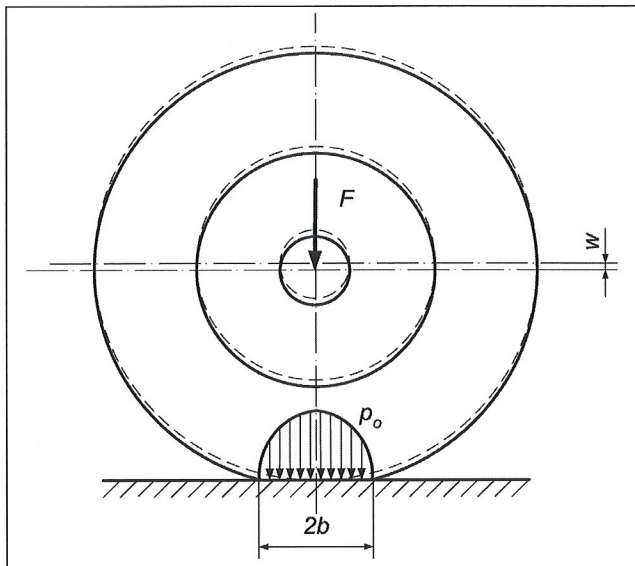


Abb. 1: Zylindrische Laufmantelrollen mit partieller Abstützung (Vogel Räder- und Rollenfabrik GmbH & Co, D-21109 Hamburg, und Vulkoprin NV, B-8700 Tielt).





liegenden Untersuchung auf der Prüfeinrichtung vorgenommen, die an der HSR entwickelt worden war [5]. Untersucht wurden einerseits eigens hierfür hergestellte Versuchsrollen aus POM mit einem Rollendurchmesser  $d_R = 100$  mm und abgestuften Nabdurchmessern  $d_N$ . Für die in der Auswertung erforderlichen Kriechmodulen konnte auf die Werte aus früheren Untersuchungen [1] zurückgegriffen werden.

**Ergebnisse**  
*Typologie*

Bei der morphologischen Untersuchung der möglichen und in der Praxis tatsächlich auftretenden Formen der partiellen Abstützung kristallisierten sich mit der inneren und der äusseren Abstützung zwei hauptsächliche Typen heraus [3], die sich in der Abplattungsformel etwas unterscheiden. Beiden Typen kann je eine Untervariante zugeordnet werden (Abb. 4), bei denen der Innendurchmesser im nicht abgestützten Teil des Laufmantels leicht kleiner ist als der Nabdurchmesser. Es hat sich gezeigt, dass der Einfluss dieser geometrischen Änderungen auf die Ergebnisse vernachlässigbar klein ist. Damit müssen in der Untersuchung le-

diglich die Typen A (Abstützung innen) und B (Abstützung aussen) unterschieden werden.

Ob der Übergang von zylindrischer Lauffläche und Stirnfläche mit einer Fase der Länge  $a$  oder einem Radius  $r = a$  ausgeführt wird (Abb. 2), hat auf die Resultate praktisch keinen Einfluss. Ebenso ist die Grösse des Fasenwinkels innerhalb des Bereichs  $15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$  unerheblich [4].

**Kontaktfläche**

Wie bei zylindrischen Rollen auf ebener Unterlage zu erwarten, stellt sich bei beiden Abstützungstypen unter Belastung eine in etwa rechteckige Kontaktfläche ein. Deren halbe Breite (Abb. 3) lässt sich wie bei den vollständig abgestützten Laufrollen innerhalb der angegebenen Grenzen des Verhältnisses  $d_N/d_R$  mit guter Genauigkeit anhand der bekannten Beziehung

$$b = 1,08 \cdot \sqrt{\frac{F \cdot d_R}{E_V \cdot l_a}} \quad (1)$$

erfassen. Darin bedeutet

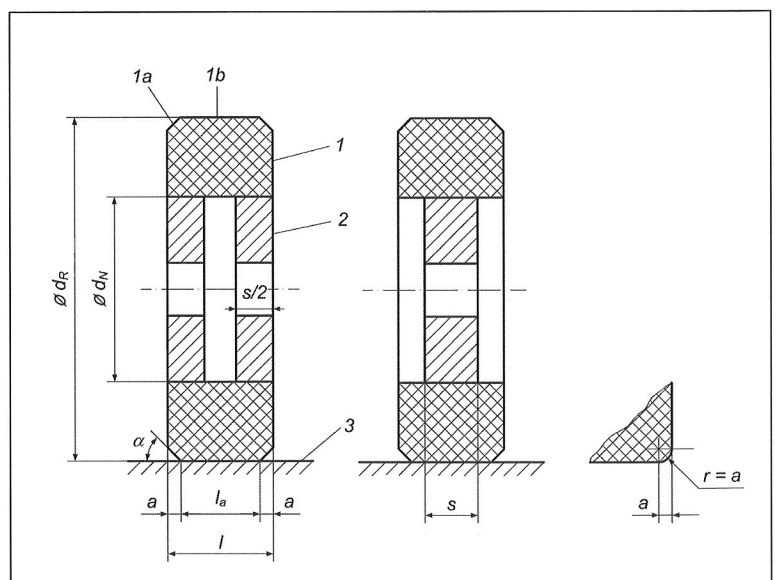
$$E_V = 2 \cdot \frac{E_C \cdot E_L}{E_C + E_L} \quad (2)$$

- modul, ist keine Funktion der Last, und es kann das Boltzmannsche Zeit-Verformungs-Superpositionsprinzip [2] angewendet werden;
- d) zwischen Nabe und Laufmantel besteht kein Stoffschluss;
- e) allfällige Vorspannungen durch Aufpressen bzw. Umspritzen lassen sich linear überlagern;
- f) die Nabe besteht aus einem Werkstoff vergleichsweise hoher Steifigkeit, so dass ihre Verformung vernachlässigt werden kann;
- g) die Belastung besteht aus einer statischen oder quasistatischen Radiallast im Zentrum der Nabe;
- h) die Rolle wirkt als reine Laufrolle, d.h. es wirken keine Tangentialkräfte in der Berührungsfläche;
- i) die Unterlage ist eben und wird als linear elastischer bzw. linear viskoelastischer Halbraum betrachtet;
- k) die Rollenachse ist parallel zur Unterlage ausgerichtet, d.h. Verkatzen wird ausgeschlossen.

**Experimentelle Untersuchungen**

Die experimentelle Bestimmung der Abplattung wurde auch bei der vor-

**Abb. 2: Grössen der Kontaktmechanik;**  
**b:** halbe Kontaktflächenbreite [mm];  
**p<sub>0</sub>:** maximaler Kontaktdruck [mm];  
**w:** Abplattung [mm].



**Abb. 3: Geometrie der untersuchten Laufmantelrollen mit partieller Abstützung.**  
**1:** Laufmantel; **1a:** Lauffläche (zylindrisch); **1b:** Anfasung bzw. Abrundung;  
**2:** Nabe; **3:** Unterlage (Laufbahn).  
**d<sub>R</sub>:** Rollendurchmesser [mm]; **d<sub>N</sub>:** Nabdurchmesser [mm]; **l<sub>a</sub>:** Auflagelänge (Laufflächenbreite) [mm]; **l:** Rollenbreite (Zylinderlänge) [mm]; **r:** Rundungsradius [mm]; **s:** Breite der Abstützung [mm]; **a:** Fasenlänge [mm]; **α:** Fasenwinkel [°].

**Dank**

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekts «Grundlagen für die Auslegung von Kunststoffkonstruktionen». Für dessen Förderung danken die Verfasser der Gebert RUF Stiftung, Basel, und dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil.



den Vergleichs-Elastizitätsmodul für den Kontakt zwischen Kunststoff-Laufmantel (Kriechmodul  $E_C$  in Abhängigkeit der statischen Belastungsdauer) und Laufbahn bzw. Unterlage (Elastizitätsmodul  $E_L$ ).

Die Abweichungen zwischen den mit (1) berechneten Resultaten und jenen aus FEM-Analysen bewegen sich im Bereich von etwa  $\pm 10\%$ , wobei sich hierin auch die Diskretisierung durch das FE-Netz auswirken dürfte. Gegen die Anfasung bzw. Abrundung hin weicht die Form der Kontaktfläche vom Rechteck ab; die Breite kann dort bis zu 15% grösser sein.

**Kontaktdruck**

Die Untersuchung des maximalen Kontaktdruckes zeigte, dass aufgrund des Prinzips von de Saint-Venant (Abklinggesetz) in Abhängigkeit des Durchmesserverhältnisses  $d_N/d_R$  zwei Fälle unterschieden werden müssen.

In den Grenzen  $0,4 \leq d_N/d_R \leq 0,6$  und für Rollen ohne Anfasung bzw. Rundungsradius kann der maximale Kontaktdruck mit der bekannten Formel

$$P_{max} = P_0 \approx 0,590 \cdot \sqrt{\frac{F \cdot E_V}{l_a \cdot d_R}} \quad (3)$$

für parallele Zylinder [6, 7] in guter Übereinstimmung mit den FEM-Ergebnissen berechnet werden, und zwar innerhalb  $0,2 \leq s/l \leq 0,8$  weitgehend unabhängig vom Typ der Abstützung und vom Verhältnis  $s/l$ . Dies erklärt sich damit, dass sich die Spannungen im Laufmantel von der Abstützung auf der Nabe bis zur Lauffläche hin entsprechend dem Abklinggesetz recht gleichmässig ausbreiten können.

Bei dünnerem Laufmantel mit  $0,6 \leq d_N/d_R \leq 0,8$  tritt dagegen der Einfluss der partiellen Abstützung deutlich in Erscheinung (Abb. 5), und zwar praktisch linear, was in den Grenzen  $0,2 \leq s/l \leq 0,8$  mit der Formel

$$P_{max} \approx \left(1,38 - 0,44 \cdot \frac{s}{l}\right) \cdot P_0 \approx \left(0,81 - 0,26 \cdot \frac{s}{l}\right) \cdot \sqrt{\frac{F \cdot E_V}{l_a \cdot d_R}} \quad (4)$$

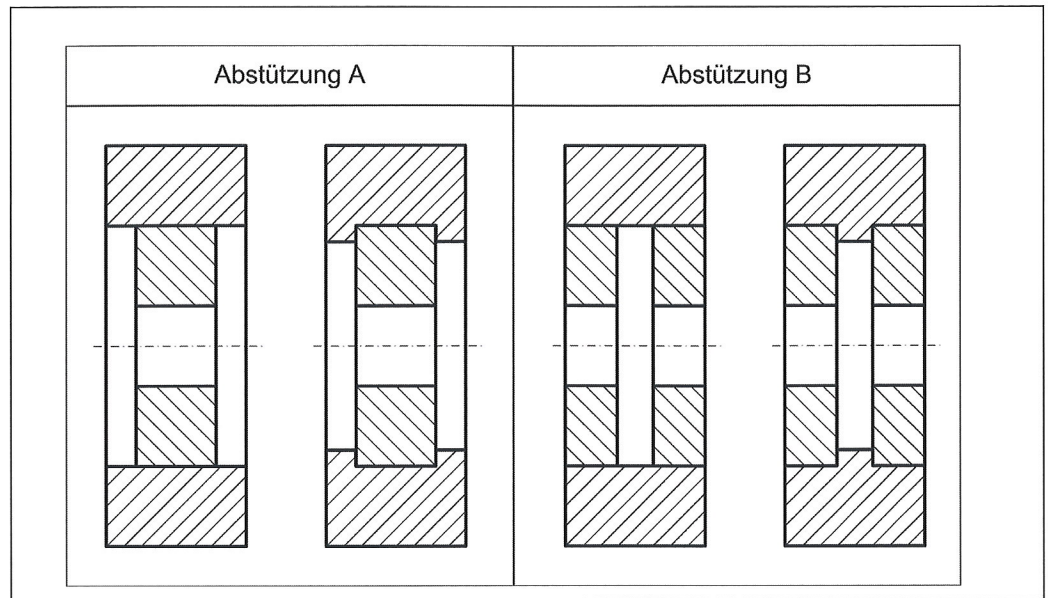


Abb. 4: Typen möglicher Abstützungen: A: Innere Abstützung; B: Äussere Abstützung.

recht gut beschrieben werden kann. Dabei wurde bewusst zugunsten einer einfachen Lösung auf eine Differenzierung der Formel für die beiden Abstützungen verzichtet.

**Abplattung**

Die Abplattungen, d.h. die radialen Verschiebungen des Nabenzentrums in Kraftrichtung, verhalten sich bei den Abstützungen A und B qualitativ gleich, jedoch zahlenmässig leicht unterschiedlich. Die Abhängigkeit vom Abstützungsverhältnis kann in beiden Fällen sehr gut durch einen quadratischen Ansatz beschrieben werden (Abb. 6).

Ausgehend von der Abplattung  $w_0$  des vollen, homogenen Zylinders [5] gemäss

$$w_0 \approx 5,7 \cdot \frac{F}{E_V \cdot l_a} \quad (5)$$

gilt für die Abstützung A innerhalb der Grenzen  $0,4 \leq s/l \leq 1,0$  die Beziehung

$$w \approx w_0 \cdot \left\{ 1,2 - 0,65 \cdot \frac{d_N}{d_R} \cdot \left[ 1 - 0,94 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left( 1 - 0,95 \cdot \frac{a}{l_a} \right) \quad (6)$$

Analog ist die Abstützung B innerhalb des Abstützungsverhältnisses  $0,2 \leq s/l \leq 1,0$  mit

$$w \approx w_0 \cdot \left\{ 1,2 - 0,65 \cdot \frac{d_N}{d_R} \cdot \left[ 1 - 1,26 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left( 1 - 0,95 \cdot \frac{a}{l_a} \right) \quad (7)$$

bestimmbar. Beide Formeln (6) und (7) ergeben im Gültigkeitsbereich  $0,4 \leq d_N/d_R \leq 0,8$  und  $0 \leq a/l_a \leq 0,2$  gut brauchbare Resultate. Die Abweichungen gegenüber den mit der FEM und experimentell bestimmten Ergebnissen liegen im Bereich von  $\pm 10\%$ .

Übrigens konvergieren beim Übergang zur vollständigen Abstützung mit  $s/l = 1,0$  beide Formeln (6) und (7) zu den Formeln, die für diesen Fall bereits früher publiziert worden sind [1].

**Spannungen**

Die Beurteilung der am Laufmantel auftretenden Spannungen konzentriert sich einerseits auf die Kontaktzone mit der Unterlage und auf die Kanten der partiellen Abstützung auf der Nabe (Abb. 7).

Der Spannungszustand in der Kontaktzone des Laufmantels setzt sich auch bei partieller Abstützung im Wesentlichen aus den Spannungskomponenten des Kontaktproblems und der Vorspannung durch Aufpressen bzw. Umspritzen zusammen, da die Spannungen in-



folge Lochleibung an der Nabe im Bereich der Kontaktfläche weitgehend abgeklungen sind. Die maximale Vergleichsspannung, bestimmt auf Basis der Schubspannungshypothese, tritt am Übergang der Kontaktfläche zur Stirnfläche des Zylinders auf und kann somit anhand der Beziehung

$$\sigma_V \approx \max \left[ p_{\max} \cdot p_s \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2}{1 - \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2} - p_{\max} \cdot p_s \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2}{1 - \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2} \right] \quad (8)$$

bestimmt werden. Darin sind  $p_{\max}$  der maximale Kontaktdruck nach (3) bzw. (4) und  $p_s$  der relaxierende Druck zwischen Nabe und Laufmantel aufgrund des Aufpressens bzw. Umspritzens. Letzterer hängt mit der zu überwindenden Durchmesserdifférenz  $\Delta d_s$  beim Aufpressen bzw. dem verhinderten Schwindungsmass beim

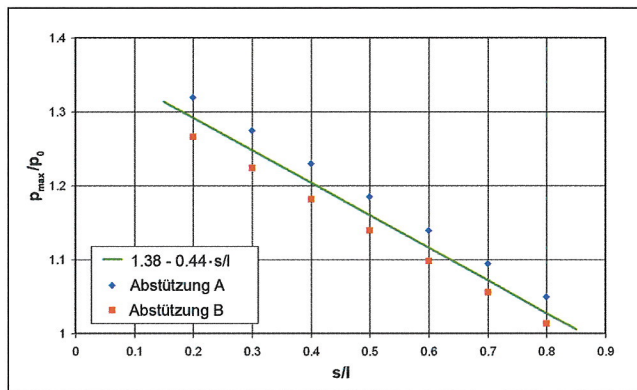


Abb. 5: Kontaktdruckverhältnis  $p_{\max}/p_0$  in Funktion von  $s/l$ : Gegenüberstellung von Resultaten aus FEM-Analyse und Formel ( $d_N/d_R = 0,8$ ).

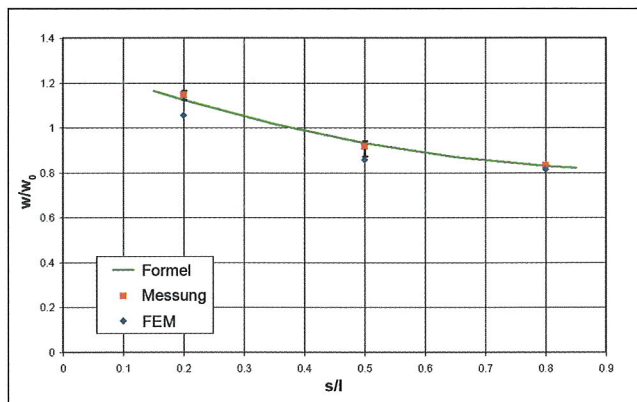


Abb. 6: Abplattungsverhältnis  $w/w_0$  in Funktion von  $s/l$ : Gegenüberstellung von Resultaten aus Messung, FEM-Analyse und Formel ( $d_N/d_R = 0,6$ ;  $l = l_a = 30$  mm;  $a = 0$ ,  $F = 2500$  N).

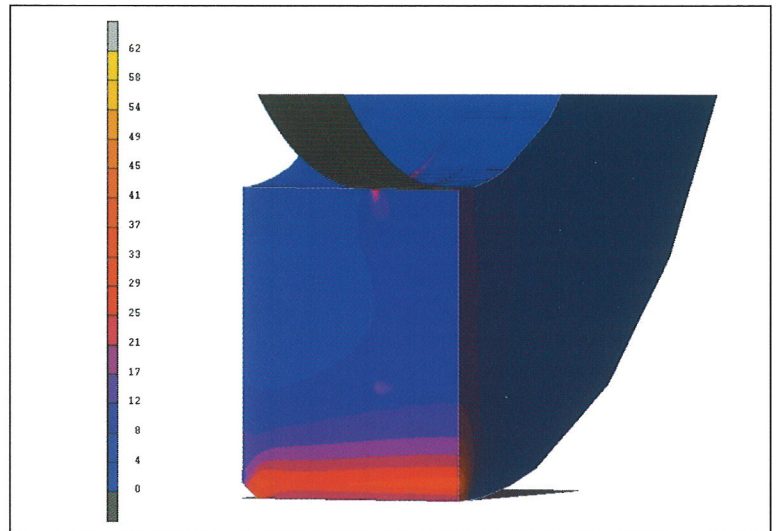


Abb. 7: Vergleichsspannung nach von Mises (Gestaltänderungsenergiehypothese) im FEM-Modell einer zylindrischen Laufmantelrolle mit Anfasung. Aus Symmetriegründen wurde nur eine Rollenhälfte mit halber Breite modelliert.

Umspritzten unter Beachtung von Voraussetzung f) zusammen gemäss

$$\Delta d_s \approx d_N \cdot \frac{p_s}{E_C} \cdot \left[ \frac{1 + \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2}{1 - \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^2} + \mu \right] \quad (9)$$

Darin sind  $E_C$  der zeitabhängig abnehmende Kriechmodul und  $\mu$  die Poissonzahl (Querkontraktionszahl) des Laufmantelwerkstoffs.

Die Höchstspannungen an den Kanten der partiellen Abstützung des Laufmantels auf der Nabe (Abb. 7) wurden nicht systematisch untersucht, da sie in der Regel kleiner sind als jene in der Kontaktzone Laufmantel/Unterlage. Um die Spannungen möglichst gering zu halten, empfiehlt es sich, diese Bereiche der Nabe nicht scharfkantig zu gestalten bzw. auszuführen.

### Ausweitung der Hertzchen Theorie

Mit den hier vorgestellten Formeln, entwickelt anhand kombinierter theoretisch-analytischer, experimenteller und mathematisch-numerischer Untersuchungen, können die kontaktmechanischen Grössen Kontaktdruck, Kontaktflächengrösse und Abplattung sowie die auftretenden Spannungen

unter den hier getroffenen Voraussetzungen bzw. Idealisierungen innerhalb der angegebenen Grenzen mit praktikabler Genauigkeit berechnet werden. Sie knüpfen an die bekannten Beziehungen (1) und (3) an, die aus der allgemeinen Hertzchen Theorie der Kontaktprobleme abgeleitet sind, und weiten diese, zusammen mit den Formeln für Kunststoffrollen mit vollständig abgestütztem zylindrischem Laufmantel [1], auf Rollenkörper realistischer Ausgestaltung aus.

### Literatur:

- [1] Kunz, J.: Kontaktmechanik zylindrischer Kunststoff-Laufmantelrollen. *Kunststoffe-Synthetics* 52(2005)6, S. 19–22
- [2] Kunz, J.: Laufrollen. In: Kunz, J., Michaeli, W., Herrlich, N., Land, W. (Hrsg.): *Kunststoffpraxis: Konstruktion*, Weka Media GmbH Kissing, Aktualisierungsstand November 2005
- [3] Lendi, M.: Kontaktverhalten zylindrischer Kunststoff-Laufrollen mit partiell abgestütztem Laufmantel. Diplomarbeit HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2004
- [4] Kunz, J., Studer, M.: Forschungsprojekt Auslegung von Kunststoff-Laufrollen. Diverse interne, unveröffentlichte Dokumente. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2004–2005
- [5] Kunz, J., De Maria, E.: Die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder. *Forschung im Ingenieurwesen* 67(2002)4, S. 146–156
- [6] Grothe, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Verlag Berlin, 21. Aufl., 2005
- [7] Czichos, H., Hennecke, M. (Hrsg.): *Hütte – Das Ingenieurwissen*. Springer Verlag Berlin, 32. Aufl., 2004