

Die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder

J. Kunz, E. de Maria

Zusammenfassung Für die Berechnung der Abplattung bei der Berührung achsparalleler Zylinder unter Kraftwirkung, d.h. der Annäherung der beiden Zylinderachsen, wird eine einfache, allgemeingültige Beziehung angegeben. Eine solche war seit den grundlegenden Arbeiten von Heinrich Hertz in den Jahren 1881 und 1882 zur Lösung des Kontaktproblems elastischer Körper unter Kraftwirkung gesucht worden. Ziel des vorliegenden Projekts war es, diese Lücke gestützt auf theoretische, rechnerisch-numerische und experimentelle Untersuchungen zu schliessen. Die dabei gewonnenen Hauptkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Abplattung paralleler Zylinder ist direkt proportional zur Belastung sowie umgekehrt proportional zur Werkstoffsteifigkeit und zur Zylinderlänge. Sie ist ausserdem von den Krümmungsverhältnissen unabhängig, wird also weder von der Grösse der Zylinderradien noch von den Krümmungskombinationen konvex/konvex, konvex/eben oder konvex/konkav beeinflusst. Diese Aussagen werden theoretisch begründet und mit FEM-Rechnungen sowie experimentell belegt. Sie gelten in dieser Form für volle Zylinder und für Körper mit zylindrischer Oberfläche im Kontaktbereich.

The displacement in the contact problem of parallel cylinders

Abstract To calculate the deflection of cylinders with parallel axes contacting under load, i.e. the approach of the two axes, a simple equation of general validity is given. Such an equation was searched for since the fundamental works of Heinrich Hertz in 1881 and 1882 solving the contact problem of elastic bodies under load. The objective of the presented project was to close this gap on the base of theoretical, numerical and experimental investigations. The principal results can be summarized as follows: The deflection of parallel cylinders is directly proportional to

the loading force, but reciprocal to the materials stiffness and to the length of the cylinder. Besides this it is independent of the curvature relations, therefore not influenced by the values of the cylinder's radius and the combinations of curvatures which are convex/convex, convex/plane and convex/concave. These statements are explained theoretically and verified experimentally as well as with FEM-calculations. In this form, they are valid for whole cylinders and for bodies with cylindrical surface in the contact region.

Formelzeichen

a	Radius der (kreisförmigen) Kontaktfläche, mm
b	halbe Breite der (rechteckigen) Kontaktfläche, mm
C	Konstante
D	Drahtdurchmesser, mm
E	Vergleichs-Elastizitätsmodul, N/mm ²
F	Kontaktkraft, N
K	Kraft (als Dimension)
L	Länge (als Dimension)
l	Länge der Zylinder, mm
l_0	charakteristische Länge, mm
M	Steifigkeitssymbol, N/mm ²
p_0	maximaler Kontaktdruck, N/mm ²
R	Vergleichs-Krümmungsradius zweier Kugeln, mm
R'	Vergleichs-Krümmungsradius zweier Zylinder, mm
w_0	Abplattung, Annäherung der beiden Zylinderachsen, mm
z	Koordinate in Richtung der Berührungsnormalen, mm
α	Exponent
β	Exponent
γ	Exponent
δ	Zusammendrückung einer Walze zwischen zwei starren Ebenen, mm
ε	Exponent
μ	Querkontraktionszahl, Poissonzahl
σ	Normalspannung, N/mm ²

Eingegangen: 11. April 2002

J. Kunz (✉), E. de Maria
Hochschule für Technik Rapperswil HSR, Oberseestrasse 10,
CH-8640 Rapperswil

Die vorliegende Arbeit wurde in verdankenswerter Weise finanziert von der Gebert RUF Stiftung (GRS), Basel, dem Forschungsfonds der Hochschule für Technik Rapperswil (HSR), Rapperswil und der Weidmann Plastics Technology AG, Rapperswil.

Indizes

1	Körper 1
2	Körper 2
St	Stahl
ν	Vergleichsgrösse

1 Ausgangslage

1.1 Einleitung

Die Kraftübertragung zwischen zwei Körpern findet stets über Kontaktflächen statt, die an Bauteilen entweder eigens dafür konstruktiv gestaltet werden oder sich durch lokale Verformung der Körper unter Kraftwirkung im Kontaktbereich ausbilden. Dies letztere ist dann der Fall, wenn die beiden sich berührenden Oberflächen unterschiedlich gekrümmt sind, wie das etwa bei Verzahnungen, Wälzlagern, Laufrollen und vielen andern in Maschinen-, Anlagen- und Apparatebau verbreiteten Anwendungen der Fall ist. Der in diesen Kontaktflächen entstehende Druck ist der belastenden Kraft statisch äquivalent. Der Druck wird bei kleinen Kontaktflächen sehr gross, was für die beteiligten Werkstoffe eine hohe Beanspruchung darstellt.

Das Interesse des Ingenieurs an der Kenntnis der Zusammenhänge zwischen Kraft, Kontaktfläche, Druckbeanspruchung und Verformung in der Kontaktzone konzentriert sich vor allem auf folgende Grössen:

- maximaler Kontaktdruck, allenfalls auch mittlerer Kontaktdruck,
- Form und Abmessungen der Kontaktfläche,
- Spannungszustand in der Umgebung der Kontaktfläche,
- Abplattung der beiden Körper, d.h. deren gegenseitige Annäherung.

Das Problem der theoretischen Punktberührung elastischer Körper mit beliebig gekrümmten Oberflächen wurde von Heinrich Hertz in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gelöst. Die Ergebnisse seiner grundlegenden Arbeiten publizierte er 1881 [1] und 1882 [2]. Wie sich gezeigt hat, ist die mathematische Beschreibung dieser Zusammenhänge alles andere als elementar. Zur Abplattung paralleler Zylinder mit theoretischer Linienberührung äusserte sich Hertz dahingehend, dass sie nach seiner Theorie logarithmisch unendlich werden würde, was er mit der zylindrischen Geometrie der Kontaktkörper erklärte, und sie daher ausserhalb des ihn beschäftigenden Problems falle [2]. Tatsächlich ist es bis heute nicht gelungen, die Abplattung paralleler Zylinder aus der allgemeinen Hertzchen Theorie abzuleiten. Hingegen sind immer wieder auf anderen Wegen Lösungsversuche unternommen worden, von denen jedoch keine vollauf zu befriedigen vermag. Insbesondere fehlt die Allgemeingültigkeit für beliebige Krümmungskombinationen.

1.2 Allgemeine Hertzche Theorie der Kontaktprobleme

Die Überlegungen von Heinrich Hertz bei der Entwicklung seiner Theorie der Kontaktprobleme basieren auf einer Reihe von Annahmen bzw. Voraussetzungen:

- a) die Werkstoffe beider Kontaktkörper sind homogen und isotrop
- b) die Werkstoffe verhalten sich rein linear-elastisch, plastische Verformungen treten demnach nicht auf

- c) die beiden Körper berühren sich im unbelasteten Zustand in einem Punkt (theoretische Punktberührung)
- d) die entstehenden Kontaktflächen sind sehr klein im Vergleich mit der Gesamtoberfläche
- e) die Oberflächen der beiden Körper sind reibungsfrei, d.h. es können nur Druckkräfte senkrecht zur Kontaktfläche auftreten
- f) die unverformten Oberflächen der beiden Körper lassen sich in der Umgebung der Kontaktstelle hinreichend genau durch quadratische Gleichungen beschreiben.

Die Ergebnisse der elastizitätstheoretischen Berechnungen von Hertz lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- die Projektion der Kontaktfläche in Richtung der Berührungsnormalen hat die Form einer Ellipse
- die Druckverteilung über der Kontaktfläche hat die Form eines halben Ellipsoids
- der maximale Kontaktdruck ist 3/2 mal so gross wie der mittlere Kontaktdruck
- unterhalb der Kontaktfläche herrscht ein räumlicher Spannungszustand mit Druckspannungen in allen drei Raumrichtungen.

Diese Resultate gelten – unter Beachtung der obigen Voraussetzungen – selbst dann, wenn einer der beiden Kontaktkörper eben oder konkav gekrümmt ist.

Formeln und Zahlenwerte für die ingenieurmässige Berechnung von Kontaktflächenabmessungen, maximalem Kontaktdruck und Abplattung, d.h. gegenseitige Annäherung der beiden Körper, können den technischen Handbüchern entnommen werden [3–5]. So gilt beispielsweise für den Kontakt zweier Kugeln (Bild 1):

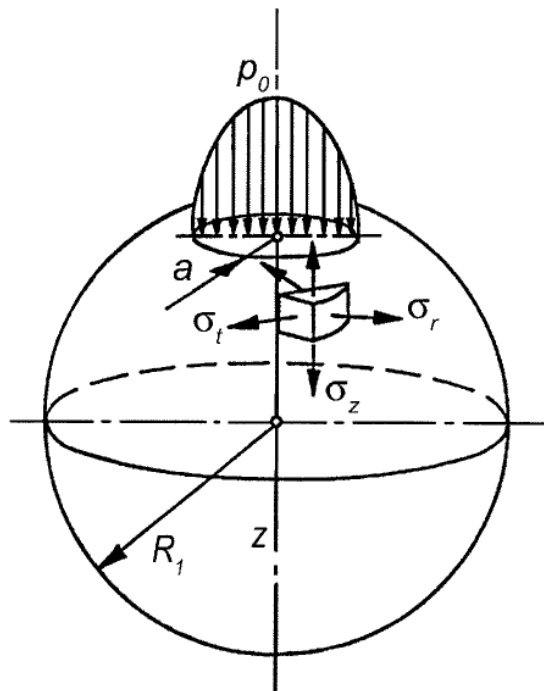


Bild 1. Kugelförmiger Kontaktkörper (Kontaktfläche übergross dargestellt)

- Radius der Kontaktfläche:

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{FR}{E}} \quad (1)$$

- Maximaler Kontaktdruck:

$$p_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R^2}} \quad (2)$$

- Abplattung:

$$w_0 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F^2}{E^2 R}} \quad (3)$$

In diesen Beziehungen ist das Querkontraktionsverhalten beider Kontaktkörper mit einer Poissonzahl von je $\mu = 0,3$ bereits mit eingerechnet. Bei abweichenden Werten kann auf allgemeinere Ausdrücke zurückgegriffen werden, was jedoch für die vorliegenden Betrachtungen nicht erforderlich ist. Weiter sind in diesen Gleichungen mit R und E Abkürzungen enthalten, denen die geometrische bzw. physikalische Bedeutung einer Vergleichsgröße zugeordnet werden kann:

- Vergleichs-Krümmungsradius

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4)$$

mit R_1 und R_2 als Radien der Kugelflächen der beiden Körper 1 und 2. Bei konkaver Krümmung ist der betreffende Radius negativ einzusetzen.

- Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$E = 2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad (5)$$

mit E_1 und E_2 als Elastizitätsmoduln der beiden Werkstoffe.

Die räumlichen Spannungskomponenten σ_z sowie $\sigma_r = \sigma_t$ (Bild 2) ergeben nach der Schubspannungshypothese die maximale Vergleichsspannung [9]

$$\sigma_{v \max} = \sigma_v(z = 0,47a) = 0,62p_0 \quad (6)$$

Sie tritt in einer Tiefe $z = 0,47a$ unterhalb der Kontaktfläche auf. Die Ausdehnung der Kontaktzone ins Innere der Kontaktkörper ist somit dem Kontaktflächenradius a direkt proportional.

1.3

Kontakt paralleler Zylinder

Beim Kontakt zweier unverformter Zylinder längs einer erzeugenden Geraden liegt ein spezielles Problem vor, indem die Kontaktfläche die Form eines Rechtecks annimmt (Bild 3). Die direkte Anwendung der Hertzschen Theorie, welche sich auf theoretische Punktberührung bezieht, führt dagegen zu einer unendlich langen und unendlich schmalen Ellipse, was der Realität widerspricht. Erst die Anwendung eines mathematischen Kunstgriffs gestattet die analytische Bestimmung der halben Kontaktflächenbreite und des maximalen Kontaktdrucks wie folgt:

- Halbe Breite der rechteckigen Kontaktfläche:

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{FR'}{El}} \quad (7)$$

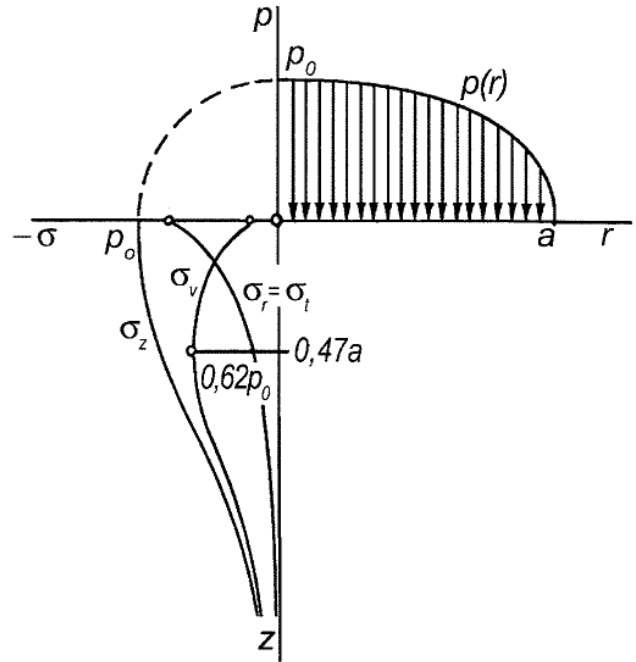


Bild 2. Spannungsverlauf ins Innere der Kugel unterhalb der Kontaktfläche

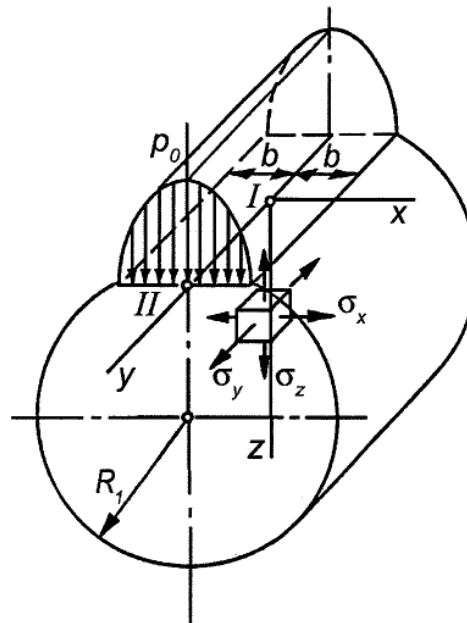


Bild 3. Zylindrischer Kontaktkörper (Kontaktfläche übergross dargestellt)

- Maximaler Kontaktdruck:

$$p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{FE}{lR'}} \quad (8)$$

Hierin bedeuten E den Vergleichs-Elastizitätsmodul (5), l die Länge des Zylinders und analog zu (4)

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (9)$$

den Vergleichs-Krümmungsradius mit R_1 und R_2 als Radien der Zylinderflächen 1 und 2. Bei konkaver Krümmung ist der betreffende Radius negativ einzusetzen. In den Zahlenwerten von (7) und (8) ist das Querkontraktionsverhalten beider Kontaktkörper mit einer Poissonzahl von je $\mu = 0,3$ bereits mit eingerechnet.

Voraussetzen dabei ist, dass sich der Kontaktdruck über die Zylinderlänge gleichmässig verteilt, so dass allfällige Kanteneffekte ausbleiben. Dies bedeutet im allgemeinen, dass die beiden sich berührenden Zylinder gleich lang sein müssen, ausser der längere Zylinder habe eine sehr viel höhere Steifigkeit als der kürzere.

Die Abplattung w_0 , also die Annäherung der beiden Zylinderachsen, konnte anhand der Hertz'schen Theorie bisher nicht berechnet werden. Hertz [2] selber hatte schon auf die diesbezüglichen Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die er mit der zylindrischen Form der Kontaktkörper begründete.

Die räumlichen Spannungskomponenten σ_x , σ_y und σ_z (Bild 4) lassen sich rechnerisch bestimmen. Sie ergeben nach der Schubspannungshypothese die maximale Vergleichsspannung [9]

$$\sigma_{v\max} = \sigma_v(z = 0,78b) = 0,60p_0 \quad (10)$$

in einer Tiefe $z = 0,7b$ unterhalb der Kontaktfläche. Die Ausdehnung der Kontaktzone ins Innere der zylindrischen Kontaktkörper ist direkt proportional zur halben Kontaktflächenbreite b .

Für die Berechnung der Abplattung paralleler Zylinder ist bis heute keine allgemeingültige Lösung bekannt geworden, die auf beliebige Krümmungsverhältnisse anwendbar wäre. Zwar wurde immer wieder auf verschiedenen Wegen versucht, das noch offene Problem zu lösen. Die daraus resultierenden Formeln gelten jedoch praktisch alle nur für spezielle Krümmungsverhältnisse und sind unter sich zum Teil recht widersprüchlich. Dementsprechend problematisch ist ihre Anwendung in der Praxis.

Vidéky [6] untersuchte im Zusammenhang mit der Berechnung von Zahnrädern die Abplattung der Oberflächen, d.h. der Zahnflanken, welche er durch Zylinderflä-

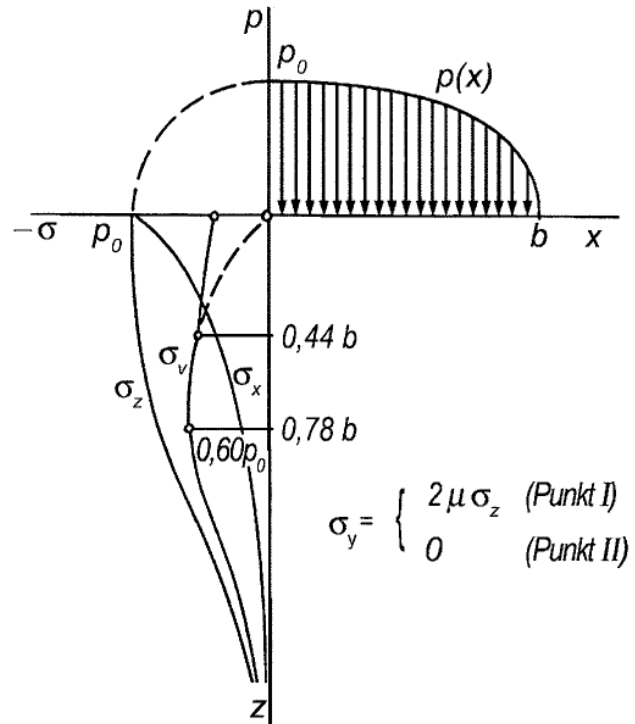


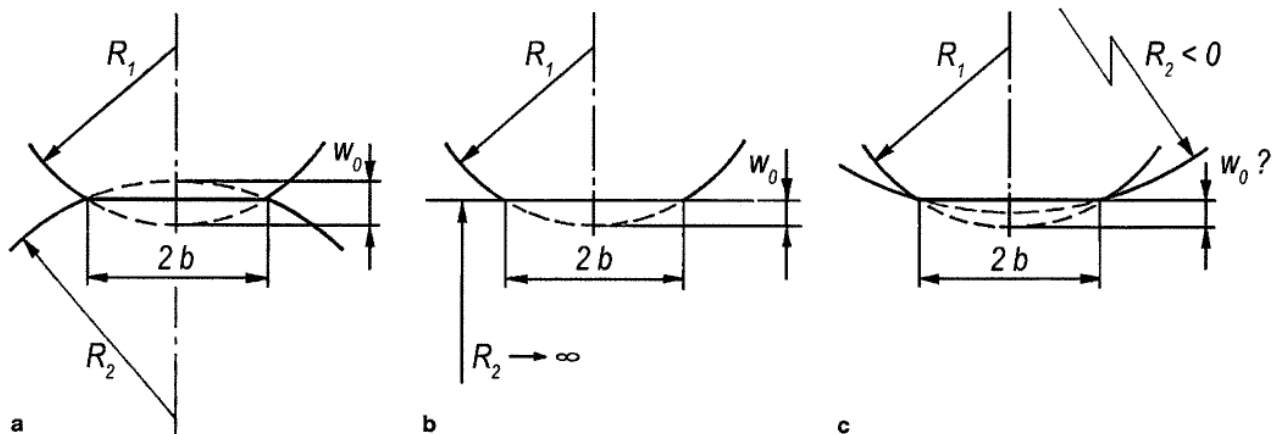
Bild 4. Spannungsverlauf im Innern des Zylinders unterhalb der Kontaktfläche

chen annähert. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, gemäss (7) bzw. (8) den maximalen Kontaktdruck p_0 und die halbe Kontaktflächenbreite b zu berechnen. Indem er die ganze Kontaktflächenbreite $2b$ annähernd als gemeinsame Sehne der beiden Zylindergrundkreise betrachtet, berechnet er die Abplattung w_0 auf rein geometrischem Weg (Bild 5a) mit dem Resultat

$$w_0 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - b^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - b^2} \quad (11)$$

Daraus erhält man mit (7) und unter Berücksichtigung von $b \ll R_1$ bzw. R_2

Bild 5. Geometrische Ermittlung der Abplattung nach Vidéky c) Kontakt konvex/konvex d) Kontakt konvex/eben c) Kontakt konvex/konkav



$$w_0 \approx 1,16 \frac{F}{El} \quad (12)$$

Demnach ist die Zylinderabplattung von den Krümmungsverhältnissen unabhängig. Da die rein geometrische Überlegung von Videky die elastische Verformung des Zylinders vollständig ignoriert, ist der Zahlenwert jedoch zu klein und damit nicht realistisch. Der Kontakt mit einer elastischen Ebene (Bild 5b) führt mit $R_2 \rightarrow \infty$ zu einem problematischen Grenzfall. Ganz unsinnig wird dieser Ansatz für den Kontakt zwischen einer konvexen und einer konkaven Zylinderfläche (Bild 5c), indem auf der konkaven Seite Material auftreten müsste, das gar nicht existiert.

A. Föppl [7] leitete mittels elastizitätstheoretischer Betrachtungen eine Beziehung her für die Zusammendrückung einer zylindrischen Walze zwischen zwei starren Ebenen mit dem Resultat

$$\delta = 2w_0 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \cdot \frac{F}{l} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{2R_1}{b} \right) \quad (13)$$

Die Abplattung auf jeder Seite des Zylinders wird mit b aus (7) und $\mu_1 \approx 0,3$

$$w_0 = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \cdot \frac{F}{l} \left(1,91 + \ln \frac{R_1 E_1 l}{F} \right) \approx 0,290 \frac{F}{E_1 l} \left(1,91 + \ln \frac{R_1 E_1 l}{F} \right) \quad (14)$$

Sie setzt sich also aus einem vom Krümmungsradius R_1 unabhängigen und einem von R_1 logarithmisch abhängigen Teil zusammen.

Föppl selber dachte offenbar daran, seine Formel auch auf den Kontakt zweier Zylinder aus gleichem Material anzuwenden. Er wies jedoch gleichzeitig darauf hin, dass bei sehr verschiedenen Durchmessern der grössere Zylinder eine weit grössere Zusammendrückung erfahren würde als der kleinere, und beim Übergang zu einer Ebene die Abplattung gar unendlich gross werden würde. Diese Einwände machen deutlich, dass die Anwendbarkeit dieser Lösung sehr beschränkt und problematisch ist.

Trotzdem ist immer wieder versucht worden, die Föppl-Lösung zu verallgemeinern, etwa in der Form (vgl. [5])

$$w_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{2R_1}{b} + \ln \frac{2R_2}{b} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} \right) \quad (15)$$

worin mit E wohl der Vergleichs-Elastizitätsmodul (5) gemeint sein soll, was aber mathematisch keinen Sinn macht. Mit b aus (7) und $\mu_1 \approx 0,3$ wird daraus

$$w_0 = 0,579 \frac{F}{El} \left\{ 1,21 + \ln \left[\frac{(R_1 + R_2)El}{F} \right] \right\} \quad (16)$$

Gerade darin kommt aber die Problematik einer ebenen ($R \rightarrow \infty$) oder gar konkaven ($R < 0$) Kontaktfläche sehr klar zum Vorschein, denn der Radius des konkaven Körpers muss betragsmässig stets grösser sein als der Radius des konvexen Gegenkörpers. Es bestätigt sich somit, dass eine solche Beziehung – wenn überhaupt – sinnvolle Ergebnisse

nur für den Kontakt zweier konvexer Zylinder bringen kann.

Bochmann [8] untersuchte die Abplattung von Stahl-drähten zwischen ebenen Messstempeln aus Stahl. Dabei fand er empirisch, dass die Abplattung proportional von der Belastung F sowie umgekehrt proportional von der aufliegenden Drahtlänge l und von der dritten Wurzel aus dem Drahtdurchmesser D abhängt. Die entsprechende Zahlenwertgleichung für die Abplattung eines Stahlzylinders zwischen zwei Ebenen aus Stahl lautet

$$\delta = 2w_0 = \frac{0,923}{10^4} \cdot \frac{F}{l\sqrt[3]{D}} = \frac{0,732}{10^3} \cdot \frac{F}{l\sqrt[3]{R}} \quad (17)$$

mit $[\delta] = \text{mm}$, $[F] = \text{N}$ und $[D] = [R] = [l] = \text{mm}$. Anzumerken ist, dass in der Messanordnung die Drähte zum Teil seitlich über die Messstempel ragten, so dass Randeffekte wie Kantenpressung die Resultate beeinflussen. Bei Bedarf kann die für Stahl gültige Beziehung (17) mit einem Korrekturfaktor

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{St}}{1 - \mu_{St}^2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \quad (18)$$

auf den Kontakt zwischen zwei beliebigen Werkstoffen umgerechnet werden.

Lundberg [10] entwickelte ähnlich wie Hertz eine Lösung auf der Basis einer Potentialtheorie. Dabei setzt er für den Kontakt paralleler Zylinder voraus, dass die Kontaktfläche ein sehr langes, schmales Rechteck ist, das als Ausschnitt aus einer unendlich langen Ellipse betrachtet werden kann. Auf diesem Weg gelangt er schliesslich zum Resultat

$$w_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{F}{l} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{\pi}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)} \cdot \frac{l^3}{FR'} \right] \right\} \quad (19)$$

worin R' den Vergleichsradius (9) bedeutet. Zum gleichen Ergebnis kommen übrigens drei Jahrzehnte später auch Puttock und Thwaite [11]. Die Formel (19) scheint zwar eine gewisse Ähnlichkeit mit der Lösung (13) bzw. (14) von Föppl aufzuweisen, unterscheidet sich aber insbesondere im Argument des Logarithmus deutlich, in dem sich die Zylinderkrümmung in entgegengesetzter Proportionalität auswirkt.

Schmidt [12] gelangt bei der Untersuchung der Verformung von zylindrischen Kunststoffrollen auf rein empirischem Weg zur Erkenntnis, dass die Abplattung zwischen zwei starren Platten der belastenden Kraft direkt proportional, aber vom Rollendurchmesser unabhängig ist. Seine Formel für die Zusammendrückung des vollen Zylinders lautet

$$\delta = 2w_0 = 4 \frac{F}{E_1 l} \quad (20)$$

Für die empirische Ermittlung seines Zahlenwertes benutzte Schmidt korrekt den bei Kunststoffen zeitabhängigen, Kriechmodul genannten Elastizitätsmodul $E_1(t)$, unerklärlicherweise aber jenen für Biegebeanspruchung, ohne diese seltsame Wahl zu begründen.

Steiner [13] kam ebenfalls zum Schluss, dass die Abplattung zylindrischer Kunststoffrollen zwischen zwei starren Platten proportional zur Kraft und unabhängig vom Rollendurchmesser ist, und fand den Zusammenhang

$$\delta = 2w_0 = 5,66 \frac{F}{E_1 l} \quad (21)$$

Seine Untersuchungen basieren auf der Formänderungsarbeit, die er, gestützt auf die Spannungsgleichungen im Zylinder, numerisch berechnete und experimentell überprüfte.

Die kritische Würdigung der betrachteten Lösungen zeigt, dass keine hinsichtlich der auftretenden Krümmungsverhältnisse allgemeingültig ist. Sie sind entweder theoretisch fragwürdig, nicht experimentell untermauert oder gelten nur für den Spezialfall der zylindrischen Rolle zwischen zwei starren Platten.

Ein zahlenmässiger Vergleich der verschiedenen Lösungen anhand konkreter Daten ist daher nur unter Beschränkung auf die zylindrische Rolle zwischen zwei starren Platten möglich. Während die Formeln von Föppl, Lundberg und Steiner relativ nahe beisammen liegende Resultate liefern, erreichen jene nach Bochmann und vor allem nach Vidéky nur etwa 20 bis 40 Prozent davon.

1.4

Problemstellung

Aus den vorgenannten Feststellungen ergab sich das Ziel, eine Berechnungsformel für die Abplattung paralleler Zylinder, insbesondere Kunststoffrollen, zu entwickeln. Diese sollte:

- 1) möglichst allgemeingültig sein, d.h. insbesondere auf beliebige Krümmungsverhältnisse wie konvex/konvex, konvex/eben oder konvex/konkav angewendet werden können,
- 2) auf beliebige Werkstoffkombinationen angewendet werden können, auch wenn sich die vorzunehmenden Untersuchungen in erster Linie auf Kunststoffrollen beziehen,
- 3) sich widerspruchsfrei in die Hertzsche Theorie (vgl. 1.1) einfügen, also insbesondere von den selben Voraussetzungen a) bis f) ausgehen und die bestehenden Beziehungen (7) und (8) ergänzen,
- 4) theoretisch plausibel begründet werden können,
- 5) durch experimentelle Resultate bestätigt werden,
- 6) numerisch, d.h. mit Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM), bestätigt werden,
- 7) auf zylindrische Rollen mit Bohrung, Nabe und zentrischer Belastung erweitert werden können.

2

Theoretische Untersuchungen

2.1

Dimensionsanalyse

Die massgebenden Parameter beim Kontaktproblem paralleler Zylinder sind, wie auch aus (7) und (8) hervorgeht, die Kontaktkraft F , der Vergleichs-Elastizitätsmodul E (5), der Vergleichs-Krümmungsradius R' (9) und die Länge l der Zylinder. Damit können die theoretischen

Überlegungen von der Funktion $w_0 = C \cdot f(F, E, R', l)$ mit einer Konstanten C ausgehen, und mit den Dimensionen Kraft (K) und Länge (L) gilt

$$\begin{aligned} [w_0] &= L && [\text{mm}] \\ [F] &= K && [\text{N}] \\ [E] &= K \cdot L^{-2} && [\text{N/mm}^2] \\ [R'] &= L && [\text{mm}] \\ [l] &= L && [\text{mm}] \end{aligned}$$

Der Ansatz

$$[w_0] = [F] \cdot [E] \cdot [R'] \cdot [l] \quad (22)$$

führt auf die Gleichung

$$K^0 \cdot L^1 = K^\alpha \cdot K^\beta \cdot L^{-2\beta} \cdot L^\gamma \cdot L^\varepsilon = K^{(\alpha+\beta)} \cdot L^{(-2\beta+\gamma+\varepsilon)} \quad (23)$$

mit den vier unbekanntenen Exponenten α , β , γ und ε , zwischen denen die Bedingungen

$$\alpha + \beta = 0 \quad (24)$$

$$-2\beta + \gamma + \varepsilon = 1 \quad (25)$$

bestehen. Wegen der gleichmässigen Kraftverteilung über der Zylinderlänge sind F und l zueinander umgekehrt proportional, d.h.

$$\varepsilon = -\alpha \quad (26)$$

Da die Abplattung w_0 mit F zunehmen muss, gilt zudem

$$\alpha \geq 0 \quad (27)$$

Die darin enthaltene Annahme $\alpha = 1$ führt mit (24) und (26) auf $\beta = \varepsilon = -1$ und schliesslich mit (25) auf $\gamma = 0$. Andere Annahmen als $\alpha = 1$ führen zu Widersprüchen und müssen daher verworfen werden. Folglich resultiert aus (22) und (23) die Beziehung

$$w_0 = C \frac{F}{El} \quad (28)$$

Diese sagt aus, dass die Abplattung vom Vergleichs-Krümmungsradius R' unabhängig ist. Dies mag zunächst überraschend erscheinen. Bedenkt man aber die früheren, unabhängig voneinander gefundenen Erkenntnisse von Vidéky, Schmidt und Steiner, auch wenn sie z.T. nur für Zylinder zwischen starren Platten gelten, so ist Beziehung (28) als Struktur der gesuchten Formel durchaus realistisch.

2.2

Relationsanalyse

Zwischen den relevanten Parametern F, E, R bzw. R', l sowie b, p_0 und w_0 der Kontaktprobleme bestehen physikalisch begründbare Relationen, die sich mathematisch ausdrücken lassen. Die Verknüpfung dieser Relationen muss also ebenfalls auf die zutreffende Struktur der gesuchten Formel führen.

Diese Überlegung wird zunächst am Spezialfall des Kontakts zweier Kugeln (vgl. 1.1) überprüft, bei dem die Abplattung mit (3) bekannt ist. Hier gelten folgende Relationen:

Die Spannung σ im Kontaktkörper und der Kontakt-
druck p_0 (2) sind zueinander proportional:

$$\sigma \sim p_0 \quad (29)$$

Die Dehnung ε und die Spannung σ sind zueinander proportional (Hookesches Gesetz):

$$\varepsilon \sim \frac{\sigma}{E} \quad (30)$$

Die Spannung und damit die Dehnung erstrecken sich über eine charakteristische Länge l_0 , die nach (6) dem Kontaktflächenradius a (1) proportional ist

$$l_0 \sim a \quad (31)$$

Durch Verknüpfung von (1), (2), (29), (30) und (31) entsteht mit

$$w_0 \sim \varepsilon \cdot l_0 \sim \frac{\sigma}{E} \cdot a \sim \frac{p_0}{E} \cdot a \sim \frac{1}{E} \sqrt[3]{\frac{FR}{E}} \cdot \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R^2}} = \sqrt[3]{\frac{F^2}{E^2 R}} \quad (32)$$

die qualitativ richtige Lösung für den Kontakt zweier Kugeln entsprechend Gleichung (3). Es kann daher davon ausgegangen werden, dass die Relationsanalyse auch bei paralleler Zylindern zum Ziel führt.

Beim Kontaktproblem paralleler Zylinder (vgl. 1.2) sind die Relationen (29) und (30) gleichermaßen gültig. Analog zu (31) besteht nach (10) Proportionalität zwischen einer charakteristischen Länge l_0 und der halben Kontaktflächenbreite b (7):

$$l_0 \sim b \quad (33)$$

Die Verknüpfung von (7), (8), (29), (30) und (33) liefert nun

$$w_0 \sim \varepsilon \cdot l_0 \sim \frac{\sigma}{E} \cdot b \sim \frac{p_0}{E} \cdot b \sim \frac{1}{E} \cdot \sqrt{\frac{FE}{lR'}} \cdot \sqrt{\frac{FR'}{El}} = \frac{F}{El} \sim C \frac{F}{El} \quad (34)$$

was mit dem Ergebnis (28) der Dimensionsanalyse vollständig übereinstimmt.

2.3 Folgerungen

Die vorstehend durchgeführten theoretischen Analysen führen zu folgenden Erkenntnissen:

- Die Abplattung paralleler Zylinder kann durch die Formel (34) beschrieben werden. Dies haben die Dimensionsanalyse und die Relationsanalyse unabhängig voneinander und übereinstimmend ergeben. Die Formel (34) enthält implizit auch die Lösungen (22) von Schmidt und (23) von Steiner für die Abplattung eines Zylinders zwischen zwei starren Platten.
- Die Abplattung ist proportional zur wirkenden Kontaktkraft F , wie dies vor Schmidt und Steiner schon Vidéky und Bochmann erkannt hatten.
- Sie ist umgekehrt proportional zum Vergleichs-Elastizitätsmodul E , der nach (7) aus den Elastizitätsmoduln der beiden beteiligten Werkstoffe gebildet wird.
- Sie ist umgekehrt proportional zur Zylinderlänge l , wie bei Vidéky, Bochmann, Schmidt und Steiner.
- Sie ist unabhängig vom Vergleichs-Krümmungsradius R' und, da diesbezüglich keinerlei Einschränkungen

gemacht wurden, von den Krümmungsverhältnissen überhaupt.

- Durch den Einbezug der Gleichungen (9) und (10) fügt sich die gefundene Formel widerspruchsfrei in die Ergebnisse der Hertzschen Theorie ein.

Damit sind die Kriterien 1) bis 4) der Problemstellung (vgl. 1.5) vollumfänglich erfüllt.

Der Zahlenfaktor C in (34) ist nach den theoretischen Abklärungen noch offen und somit empirisch zu ermitteln. Ausgehend von den Resultaten (22) von Schmidt und (23) von Steiner ist anzunehmen, dass er in der Größenordnung von 4 bis 6 liegen dürfte.

3 Experimentelle Untersuchungen

3.1 Kontakt-Anordnungen

Der empirische Nachweis der Allgemeingültigkeit der theoretisch gefundenen Lösung (34) und die zahlenmäßige Bestimmung der darin enthaltenen Konstanten C verlangen Untersuchungen mit unterschiedlichen Krümmungsverhältnissen, Körperdimensionen und Werkstoffkombinationen. Die Auswahl der Anordnungen sollte auch einzelne Quervergleiche untereinander ermöglichen, um die Ergebnisse optimal abzusichern.

Der Variation der Krümmungsverhältnisse kommt in dieser Untersuchung die grösste Bedeutung zu. Dementsprechend wurden Kontakt-Anordnungen mit der Paarung der Oberflächen konvex/eben, konvex/konvex und konvex/konkav definiert.

Zwecks Einbezug unterschiedlicher Körperdimensionen in Form und Grösse wurden folgende Geometrien gewählt:

- Vollzylinder mit Radius 10 und 50 mm
- Halbzylinder mit Radius 10 und 50 mm
- Prisma mit ebener Kontaktfläche
- Prisma mit konkaver Kontaktfläche mit Radius -100 mm.

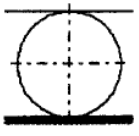
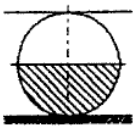
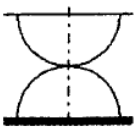
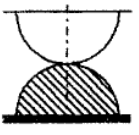
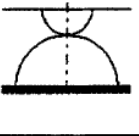
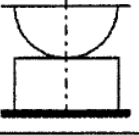
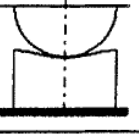
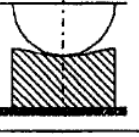
Für die Untersuchung wurden aus den verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten insgesamt acht verschiedene Anordnungen (Tabelle 1) festgelegt, bei denen dann noch zusätzlich die Radien variiert wurden.

Die Länge der Kontaktkörper wurde einheitlich auf 30 mm festgelegt, um Kantenpressungen zu vermeiden. Die Höhe der prismatischen Kontaktkörper entspricht dem Radius des jeweiligen zylindrischen Kontaktpartners, die Breite dessen Durchmesser. Hohlzylinder und Zylinder mit eingepressten Naben waren nicht Gegenstand dieser Untersuchung.

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Werkstoffsteifigkeiten ist im Zusammenhang mit der vorliegenden Problemstellung von eher untergeordneter Bedeutung. Trotzdem wurden Halbzylinder und Prismen aus zwei verschiedenen Werkstoffen in die Untersuchung einbezogen, nämlich:

- Polyacetal (POM) Tecaform AH natur (Kundert AG, CH-Jona) als technischer Kunststoff
- Stahl (St) Nr. 1.4305 als metallischer Konstruktionswerkstoff.

Tabelle 1. Untersuchte Kontakt-Anordnungen

Nr.	Skizze	Werkstoff	Krümmungsverhältnis	Bemerkungen
1		St POM St	konvex / eben	- Vergleichsmöglichkeit mit Resultaten von FÖPPL, SCHMIDT, STEINER
2		St POM St St	konvex / eben	- Obere Kontaktstelle vergleichbar mit Anordnung 1 - Untere Kontaktstelle St/St - Verformung müsste halb so gross sein wie bei der Anordnungen 1 und 3
3		St POM POM St	konvex / konvex	- Aus Symmetriegründen vergleichbar mit Anordnung 1
4		St POM St St	konvex / konvex	- Einfluss der heterogenen Werkstoffpaarung
5		St POM POM St	konvex / konvex	- Einfluss unterschiedlicher Krümmungsradien
6		St POM POM St	konvex / eben	- Einfluss unterschiedlicher Krümmungsverhältnisse
7		St POM POM St	konvex / konkav	- Einfluss unterschiedlicher Krümmungsverhältnisse
8		St POM St St	konvex / konkav	- Einfluss unterschiedlicher Krümmungsverhältnisse und heterogener Werkstoffpaarung

Für Stahl wurde der Elastizitätsmodul mit dem üblichen Wert von $2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ eingesetzt, während der Elastizitätsmodul von POM aus dem verwendeten Material unter den geltenden Bedingungen von Prüfzeit und Temperatur experimentell bestimmt wurde.

Als Kontaktkraft wurde $F = 2000 \text{ N}$ festgelegt, so dass in etwa mit einem linearen Verformungsverhalten entsprechend Voraussetzung b) gerechnet werden kann.

3.2 Experimentelle Untersuchungen

Für die experimentellen Untersuchungen wurde eigens eine Prüfeinrichtung entwickelt [14]. Sie besteht im

wesentlichen aus zwei horizontal übereinander angeordneten Aufspannplatten, die zwischen zwei Säulen vertikal gegeneinander bewegt werden können (Bild 6). Die zu untersuchenden Kontaktkörper können zwischen diesen Aufspannplatten positioniert und unter Kraftwirkung miteinander in Berührung gebracht werden. Die obere Aufspannplatte kann über eine Traverse auf der gewünschten Höhe an den Säulen fixiert werden. Der für die Messanordnung verfügbare Prüfraum weist eine Breite von 180 mm zwischen den Säulen und eine Höhe von maximal 250 mm zwischen den Kontaktplatten sowie eine Länge von 300 mm auf.

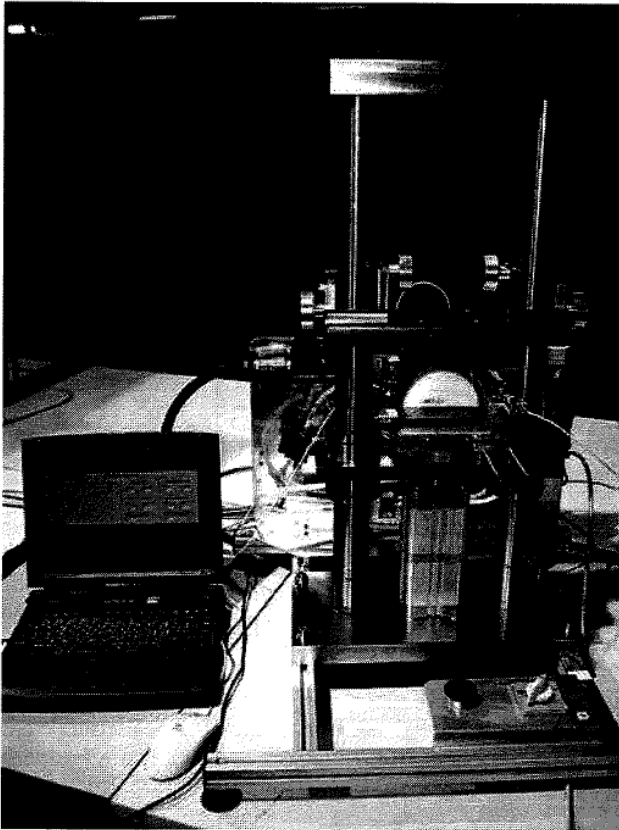


Bild 6. Prüfeinrichtung

Die Prüfkraft wird mit einem Pneumatikzylinder erzeugt, der von unten auf die untere Aufspannplatte wirkt. Die Kraftmessung erfolgt mittels einer Kraftmessdose, die zwischen dem Pneumatikzylinder und der Aufspannplatte angeordnet ist. Dieses Kraftmesssystem arbeitet mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$, bezogen auf die mögliche Maximalkraft $F = 3000$ N.

Die Messung der Abplattung erfolgt als Wegmessung mittels zweier Wirbelstromsensoren, deren Halterungen entweder direkt an der unteren Aufspannplatte oder der oben angeordneten Traverse montiert werden. Die Halterungen sind so konzipiert, dass mit den Sensoren alle Positionen im Prüfraum erreicht werden können. Die Sensoren vermögen Wegänderungen von maximal 3 mm aufzunehmen. Die statische Auflösung ihrer Messsignale liegt bei $0,3 \mu\text{m}$.

Die Bedienung der Prüfeinrichtung und die Durchführung der Messungen erfolgen computergesteuert über das Programm LabVIEW. Dieses ermöglicht die Definition der Prüfabläufe wie auch die Erfassung, Darstellung und Speicherung der Messdaten. Im vorliegenden Fall handelt es sich im wesentlichen um das definierte Aufbringen der Prüfkraft und die Wegmessung, wofür die erforderlichen Unterprogramme erstellt wurden. Die Eichung der Wegsensoren wurde mittels Endmassen vorgenommen, und zwar bei verschiedenen Massen und unterschiedlichen Anordnungen. Das Ergebnis wurde als Korrektur in das Bedienungsprogramm integriert.

Die Kunststoff-Prüfkörper für die Messung der Abplattung und des Druck-Elastizitätsmoduls wurden spanend aus Halbzeug hergestellt: Die grösseren Halb- und Vollzylinder (R 50) sowie der entsprechende E-Modul-Prüfkörper aus Stangenmaterial, alle übrigen aus Plattenmaterial. Um den Einfluss einer allfälligen Anisotropie des Halbzeugmaterials möglichst auszuschalten, wurden die E-Modul-Prüfkörper so entnommen, dass ihre Beanspruchungsrichtung mit jener der Halb- und Vollzylinder übereinstimmen.

Die Messungen für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurden unter denselben Bedingungen (Kraft, Zeit, Temperatur) vorgenommen, wie sie für die Messung der Abplattung festgelegt wurden:

- Kraft: $F = 2000$ N
- Zeit: $t = 10$ min
- Temperatur: $v \approx 23^\circ\text{C}$

Bei der Messung des Elastizitätsmoduls zeigte sich bis zur Höhe der Prüfkraft eine gute Linearität zwischen Kraft und Verformung. In diesem Messbereich sind die ermittelten Zahlenwerte $E = 3300$ N/mm² für das Stangenmaterial und $E = 2980$ N/mm² für das Plattenmaterial praktisch konstant.

3.3

FEM-Untersuchungen

Die Abplattung für die verschiedenen Kontakt-Anordnungen (Tabelle 1) wurde auch mit der Finite Elemente Methode (FEM, Programmsystem MSC.MARC-MENTAT) bestimmt. Den Berechnungen konnte nach den Erkenntnissen der Elastizitätsmodul-Bestimmung ein linear-elastisches Werkstoffverhalten zugrunde gelegt werden.

Für die Kontakt-Anordnung 1 wurden die Berechnungen mit einem 2D- und einem 3D-Modell durchgeführt. Da die Ergebnisse eine gute Übereinstimmung zeigten, rechtfertigte sich für die weiteren Anordnungen die Beschränkung auf 2D-Modelle.

Die 2D-Modelle wurden aus einem isoparametrischen, vierseitigen Schalenelement mit vier Eck-Knoten aufgebaut. Grosser Wert wurde auf eine ausreichende Feinheit des FE-Netzes in den Kontaktzonen gelegt (Bild 7). In den entfernteren Bereichen hingegen konnten grössere Elemente gewählt werden. Die untere Kontaktplatte ist in x- und in y-Richtung unverschieblich gelagert. Die obere Kontaktplatte ist in x-Richtung unverschieblich gelagert, in y-Richtung frei beweglich. In dieser Richtung erfolgt, verteilt über die ganze Breite der oberen Kontaktplatte, die Einleitung der Kontaktkraft. Der zylindrische Kontaktkörper ist entlang der vertikalen Symmetrieachse in y-Richtung gelagert, so dass sich sämtliche Verformungen unter Belastung völlig unbehindert auswirken können.

Für das 3D-Modell wurde ein isoparametrisches, sechseitiges Raumelement mit acht Eck-Knoten verwendet.

3.4

Ergebnisse

Die Resultate aus den Messungen und den FEM-Untersuchungen wurden in der Form

$$C = \frac{w_0 l E}{F} \quad (35)$$

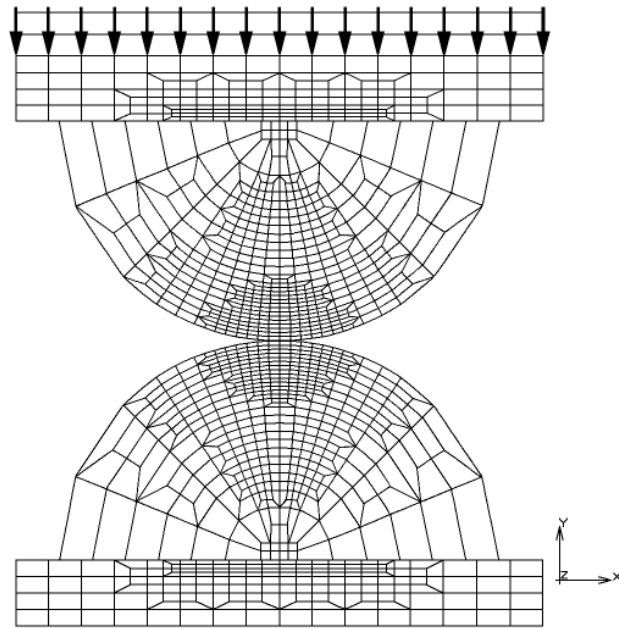


Bild 7. 2D-FEM-Modell mit vierseitigen Schalenelementen

zahlenmässig ausgewertet, wie sie aus (28) hervorgeht. Dies erlaubt auf einfache Weise die Überprüfung des theoretischen Befundes, die Abplattung sei von den Krümmungsverhältnissen unabhängig, also C sei eine Konstante, und, falls dies hinreichend genau zutrifft, die zahlenmässige Bestimmung von C . Zu diesem Zweck wurden die erhaltenen Werte von C in Funktion des Vergleichs-Krümmungsradius R' nach (9) analysiert, und zwar für alle acht Kontakt-Anordnungen einzeln sowie gesamthaft im Überblick (Bild 8).

Dieser Überblick zeigt folgendes Bild:

- Der in Messungen und FEM-Berechnungen ermittelte Faktor C erweist sich im wesentlichen als von den Krümmungsverhältnissen unabhängig. Damit werden

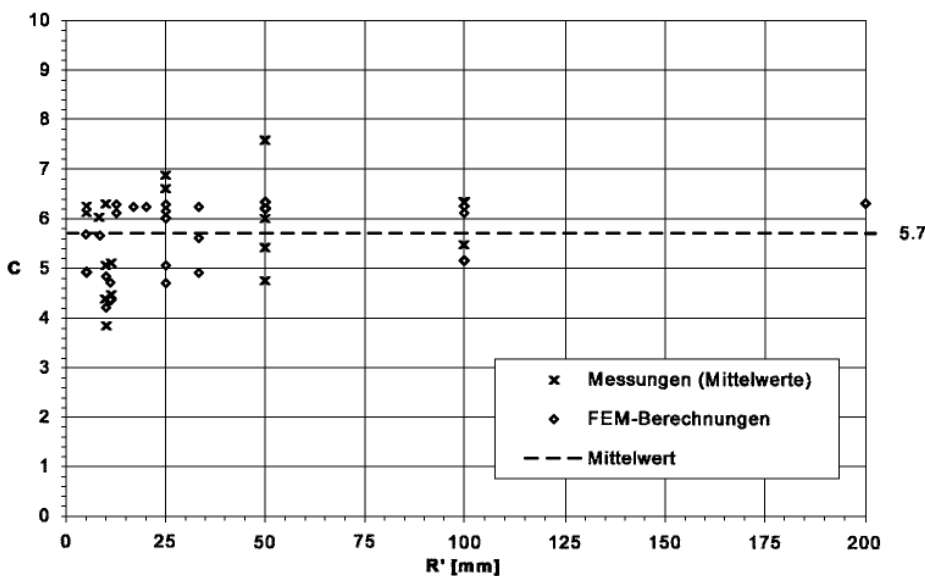


Bild 8. Faktor C in Abhängigkeit des Vergleichskrümmungsradius R' für alle Kontakt-Anordnungen im Überblick

die theoretischen Erkenntnisse der Dimensions- und der Relationsanalyse grundsätzlich bestätigt.

- Der numerische Mittelwert aus allen gemessenen und gerechneten Resultaten liegt bei

$$C \approx 5,7 \tag{36}$$

mit einer Standardabweichung von 0,777, was 13,6% entspricht. Er stimmt überraschend gut mit dem Resultat (21) von Steiner überein.

- Die relativ grosse Streuung des Faktors C tritt vor allem bei kleinen Werten des Vergleich-Krümmungsradius R' auf, und zwar hauptsächlich bei den Anordnungen 1 und 2.
- Eine Systematik der Abweichungen vom Mittelwert ist nicht erkennbar.

Untersucht wurde auch der allfällige Einfluss unterschiedlichen Querkontraktionsverhaltens der Zylinderwerkstoffe. Zu diesem Zweck wurde in FEM-Variantenrechnungen die Poissonzahl μ zwischen den Grenzen 0,3 und 0,4 variiert. Dabei hat sich herausgestellt, dass der Einfluss auf die Abplattung und somit auch auf den Zahlenwert der Konstanten C mit rund 1% so geringfügig ist, dass er ohne weiteres vernachlässigt werden darf.

Weiter ist die Frage von Bedeutung, inwieweit die prismatische Grundform und die gewählten Abmessungen der Probekörper mit der ebenen bzw. konkaven Gegenfläche (Anordnungen 6, 7 und 8) das Messresultat beeinflussen. Die Klärung dieser Frage wurde ebenfalls anhand eines FEM-Modelles durchgeführt, und zwar mit jenem der Anordnung 7, indem einerseits die Breite und andererseits die Höhe variiert wurden (Bild 9).

Es stellte sich heraus, dass die gewählten Prüfkörperabmessungen, die in der Höhe dem Radius und in der Breite dem Durchmesser entsprechen, realistisch sind. Die Variation der Breite ergab bei Werten unterhalb des Durchmessers leicht höhere Abplattungen, während ab etwa dem Durchmesser auch bei beliebig zunehmender Breite eine praktisch konstante Abplattung resultiert. Dagegen zeigte die Variation der Höhe einen stärkeren Einfluss auf die Abplattung. Bei zu geringen Höhen reagiert der Körper

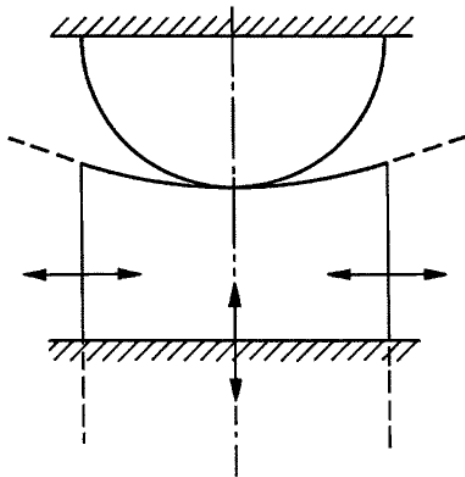


Bild 9. Variation von Breite und Höhe der Kontaktkörper mit konkaver Kontaktfläche Anordnung 7 (schematisch)

mit einer breiteren Druckverteilung, was sich auch direkt auf die Abplattung auswirkt. Übersteigt die Höhe den Wert des Durchmessers, so ändert die Druckverteilung in der Kontaktzone kaum mehr, und die darunter liegenden Bereiche des Körpers unterliegen einer recht gleichmässigen Druckverteilung. Daraus resultiert ein linear steigender Verformungszuwachs, der mit der eigentlichen Abplattung nichts zu tun hat. Diese Erkenntnis bestätigt auch die Aussage (33) der Relationsanalyse, wonach sich Spannung und Dehnung über eine typische Länge l_0 erstrecken, die der halben Kontaktflächenbreite b aus (7) proportional ist.

4

Schlussfolgerungen

Die Abplattung bei der Berührung achsparalleler Zylinder unter Kraftwirkung kann bei beliebigen Krümmungsverhältnissen mit der Beziehung

$$w_0 \approx 5,7 \frac{F}{El} \quad (37)$$

berechnet werden. Diese ergänzt die bekannten Gleichungen (7) und (8) zu einem vollständigen Gleichungssatz für das Kontaktproblem paralleler Zylinder. Obwohl die Untersuchung mit Probekörpern aus POM und aus Stahl erfolgte, kann die Beziehung (37) auf beliebige Kombinationen von Werkstoffen mit linear-elastischem Verformungsverhalten verallgemeinert werden.

Die relativ hohe Streuung der Konstanten C insbesondere bei kleinen Vergleichs-Krümmungsradien ist weiter nicht erstaunlich, da sich bei den empirischen Untersuchungen die idealisierenden Voraussetzungen von Hertz nur unvollkommen erfüllen lassen:

- Die Probekörper weisen endliche Begrenzungen auf, so dass die unter Belastung entstehenden Kontaktflächen kaum als sehr klein im Vergleich mit der Gesamtoberfläche bezeichnet werden können (Voraussetzung d). Dies gilt speziell für Anordnungen 7 und 8 mit konkaven Gegenflächen.
- Bei den Messungen an Probekörpern aus Kunststoff können lokal im Bereich der hoch beanspruchten Kon-

taktzone mehr oder weniger ausgeprägte Abweichungen vom linear-elastischen Verhalten (Voraussetzung b) auftreten.

- Bei den FEM-Untersuchungen macht sich der Einfluss der FEM-Netzgeometrie bemerkbar. Bei Körpern mit kleinen Krümmungsradien erstreckt sich der Bereich mit den hohen Spannungs- und Verformungswerten (Kontaktzone) über bedeutend mehr Elemente als bei grossen Krümmungsradien.

Dabei ist aber zu bedenken, dass bei realen Bauteilen in der Praxis die Hertzischen Voraussetzungen ebenfalls nur unvollkommen erfüllt sind. Demzufolge ist die Beziehung (37) durchaus realistisch und praktikabel. Eine Verbesserung der Genauigkeit könnte nur durch aufwendigere empirische Untersuchungen erreicht werden.

Entsprechend den untersuchten Geometrien gilt (37) in dieser Form für volle Zylinder und Körper mit zylindrischer Oberfläche im Kontaktbereich. In der Praxis können sich zusätzliche Einflüsse bemerkbar machen, wie beispielsweise eine zentrische Bohrung, insbesondere an Kunststoffrollen mit eingepressten Stahlnaben, eine zentrische Krafteinleitung oder auch gerundete bzw. angefastete Übergänge zu den Stirnseiten. Die Bestimmung solcher Einflüsse ist Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Literatur

1. Hertz H (1881) Über die Berührung fester elastischer Körper. J. reine u. ang. Math. 92, 156–171
2. Hertz H (1882) Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Verhandl. d. Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses 61, 449–463
3. Beitz W, Grote K-H (Hrsg.) (2001) Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau. 20. Aufl., Springer-Verlag Berlin
4. Czichos H (Hrsg.) (2000) Hütte – Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. 31. Aufl., Springer-Verlag Berlin
5. Young WC (1989) Roark's formulas for stress and strain. 7. Aufl., McGraw Hill Inc
6. Vidéky E (1908) Beiträge zur Berechnung der Zahnräder. Z. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 60, 579–585
7. Föppl A (1922) Vorlesungen über technische Mechanik, Fünfter Band: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. 4. Aufl., 342–347. Teubner Verlag Leipzig und Berlin
8. Bochmann H (1927) Die Abplattung von Stahlkugeln und Zylindern durch den Messdruck. Diss. TH Dresden; sowie: Z. Feinmech. und Präz. 35, 95 ff
9. Föppl L (1936) Der Spannungszustand und die Anstrengung des Werkstoffes bei der Berührung zweier Körper. Forsch. Geb. Ing.wes. 7, 209–221
10. Lundberg G (1939) Elastische Berührung zweier Halbräume. Forsch. Geb. Ing.wes. 10, 201–211
11. Puttock MJ, Thwaite G (1969) Elastic compression of spheres and cylinders at point and line contact. Nat. Stand. Lab. Techn. Paper No. 25, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization Australia
12. Schmidt H (1973) Rollen aus Hostaform. Verformungsverhalten und Versagenskriterien. Konstr. 25, 211–219
13. Steiner K (1978) Untersuchungen über die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder. Dipl.arb. Hochsch. Rapperswil
14. De Maria E (1999) Entwicklung einer Versuchseinrichtung zur experimentellen Untersuchung der Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder. Dipl.arb. Hochsch. Rapperswil