Übung 8

-

Zufallsvariablen und diskrete Verteilungen

Musterlösung

Aktuelle Version: 30. August 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Was ist eine Zufallsvariable?

   Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperimentes (Ereignisse) reelle Zahlen (Realisierung) zuordnet.

2. Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

   Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Realisierungen einer Zufallsvariable auftreten.

3. Erklären Sie den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen!

   Bei einer *diskreten Zufallsvariable* werden die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes kategorisiert oder gezählt. Die Zufallsvariable kann nur eine endliche oder abzählbar unendliche Menge an Werten annehmen.

   Bei *stetigen Zufallsvariablen* hingegen können diese in einem gegebenen Intervall beliebig genau sein. Die Zufallsvariable kann unendliche viele Werten annehmen.

4. Erklären Sie den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Verteilungen!

   Diskreten Verteilungen geben die Verteilung diskreter Zufallsvariablen an. Die Wahrscheinlichkeiten können unmittelbar aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion abgelesen werden.

   Stetige Verteilungen geben die Verteilung stetiger Zufallsvariablen an. Statt einer Wahrscheinlichkeitsfunktion hat man in diesem Fall nur die Dichtefunktion (d.h. die Ableitung der Verteilungsfunktion). Somit können Wahrscheinlichkeiten nur noch für ein Intervall angegeben werden und nicht mehr für einen einzelnen Wert.

5. Erklären Sie den Unterschied zwischen empirischen und theoretischen Verteilungen!

   Die *empirische Verteilung* (Häufigkeitsverteilung) ist das Resultat einer wiederholten Durchführung des Zufallsexperiments. *Theoretische Verteilungen* entstehen dagegen auf der Grundlage theoretischer Überlegungen.

6. Wie ist der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeits-, Dichte- und Verteilungsfunktion?

   Die (stetige oder diskrete) Verteilungsfunktion erhält man über das Summieren der (diskreten) Wahrscheinlichkeitsfunktion resp. über das Integrieren der (stetigen) Dichtefunktion.

7. Welche diskreten Verteilungsfunktionen kennen Sie und in welchen Fällen werden diese angewendet?

   - Die *Bernoulli-Verteilung* beschreibt das Eintreten von zufälligen Ereignissen, bei denen es nur zwei mögliche Versuchsausgänge gibt (Erfolg, Misserfolg). Mögliche Anwendungsfälle: Qualitätsprüfung (defekt, nicht defekt.), Münzwurf, etc.

- Die *Binomial-Verteilung* beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von zufälligen Ereignissen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben (Erfolg, Misserfolg). Mögliche Anwendungsfälle: Bitfehler in einem Datenblock, defekte Waren in Stichproben, etc.
- Die *Poissonverteilung* beschreibt die Anzahl von Ereignissen, die bei konstanter mittlerer Rate unabhängig voneinander in einem festen Zeitintervall eintreten. Mögliche Anwendungsfälle: Anzahl eintreffende Kunden in einem Zeitintervall, Anzahl verschickte E-Mails in einem Zeitintervall, etc.

8. Wie ist der Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Poissonverteilung?

   Für $np < 10$ und $n \geq 1500p$ kann die Poissonverteilung als Näherung für die Binomialverteilung verwendet werden.

9. Wie ist der Zusammenhang zwischen Bernoulli- und Binomialverteilung?

   Die Bernoulli-Verteilung ist ein Spezialfall der Binomialverteilung mit $n = 1$.

Übung 2. *Empirische Verteilung*
Sie haben die folgende Urliste:

$$x_i = (1, 4, 2, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5)$$

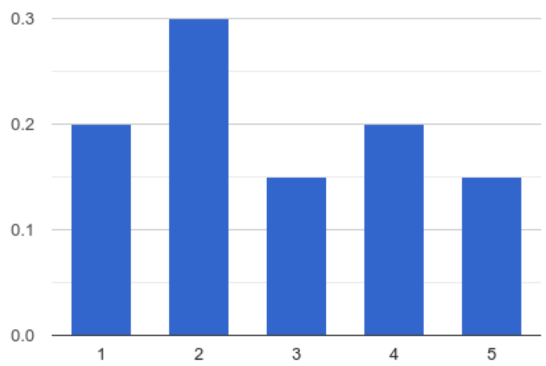
Bestimmen Sie:

1. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion und das entsprechende Diagramm.

   Wir interpretieren die Werte als Resultat eines Laplace-Experiments, die Wahrscheinlichkeitsunktion entspricht demnach der relativen einfachen Häufigkeit.

i	x_i	h_i	f_i
1	1	4	0.2
2	2	6	0.3
3	3	3	0.15
4	4	4	0.2
5	5	3	0.15
		20	

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & x = 1 \\ 0.3 & x = 2 \\ 0.15 & x = 3 \\ 0.2 & x = 4 \\ 0.15 & x = 5 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

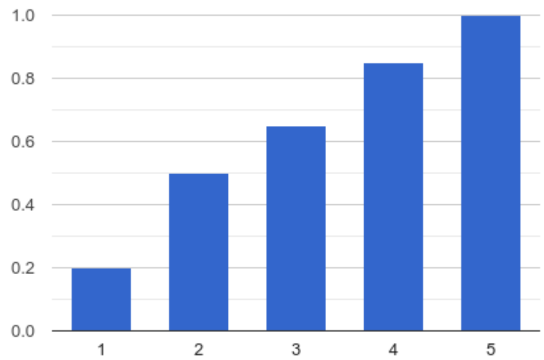


2. Die Verteilungsfunktion und das entsprechende Diagramm.

   Die Verteilungsfunktion entspricht der relativen kumulierten Häufigkeit.

i	x_i	h_i	f_i	F_i
1	1	4	0.2	0.2
2	2	6	0.3	0.5
3	3	3	0.15	0.65
4	4	4	0.2	0.85
5	5	3	0.15	1.0
		20		

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.2 & x = 1 \\ 0.5 & x = 2 \\ 0.65 & x = 3 \\ 0.85 & x = 4 \\ 0.1 & x = 5 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



3. Den Erwartungswert.

i	x_i	h_i	f_i	$x_i f(x_i)$
1	1	4	0.2	0.2
2	2	6	0.3	0.6
3	3	3	0.15	0.45
4	4	4	0.2	0.8
5	5	3	0.15	0.75
		20		2.8

$$E(x) = \sum_i x_i f(x_i) = 2.8$$

4. Die Varianz.

i	x_i	${x_i}^2$	h_i	f_i	${x_i}^2 f(x_i)$
1	1	1	4	0.2	0.2
2	2	4	6	0.3	1.2
3	3	9	3	0.15	1.35
4	4	16	4	0.2	3.2
5	5	25	3	0.15	3.75
			20		9.7

$$\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_i {x_i}^2 f(x_i) - (E(x))^2 = 9.7 - 2.8^2 = 1.86$$

Übung 3. *Theoretische Verteilung*
In einem Münzwurfspiel wird ein Einsatz von 1 CHF erhoben. Es wird dreimal eine Münze geworfen. Nach jedem Wurf wird 1 CHF ausgezahlt, wenn „Zahl“ oben landet. Die Zufallsvariable X sei der Gewinn des Spielers nach den 3 Würfen.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilfunktion von X und stellen Sie sie grafisch dar.

   Hinweis: Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion schreiben Sie am besten alle möglichen Ausgänge des Spiels auf und zählen dann die Möglichkeiten mit 0, 1, 2 bzw. 3 Erfolgen.

   Ein Spiel besteht also aus drei Würfen, jeder Wurf hat zwei mögliche Ergebnisse. Damit gibt $2^3 = 8$ mögliche Ereignisse. Jedes dieser Ereignisse ist mit einem Gewinn (auch negativ) verbunden. Sie können ihren Einsatz verlieren oder maximal 2 CHF gewinnen (dreimal gewonnen minus Einsatz). Aus Spielersicht sind die möglichen Spielausgänge (Ereignisse) also $E_{spieler} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

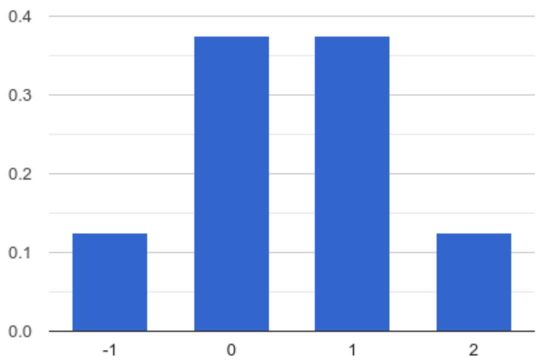
Wurf 1	Wurf 2	Wurf 3	E
K	K	K	-1
K	K	Z	0
K	Z	K	0
K	Z	Z	1
Z	K	K	0
Z	K	Z	1
Z	Z	K	1
Z	Z	Z	2

Im nächsten Schritt sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse zu bestimmen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Münze nicht manipuliert ist, also jedes Ergebnis (Kopf, Zahl) mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ eintreten kann. Dann ergibt sich ein Laplace-Experiment und wir können die Wahrscheinlichkeit einfach bestimmen zu:

x	p
-1	1/8
0	3/8
1	3/8
2	1/8

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0.125 & x = -1 \\ 0.375 & x = 0 \\ 0.375 & x = 1 \\ 0.125 & x = 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$



2. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

   Der Erwartungswert ist:

$$E(x) = \sum_i x_i f(x_i) = 0.5$$

Der Erwartungswert kann auch direkt aus dem Diagramm gelesen werden, da die Funktion symmetrisch ist.

Dia Varianz ist:

$$\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_i {x_i}^2 f(x_i) - (E(x))^2 = 1 - 0.5^2 = 0.75$$

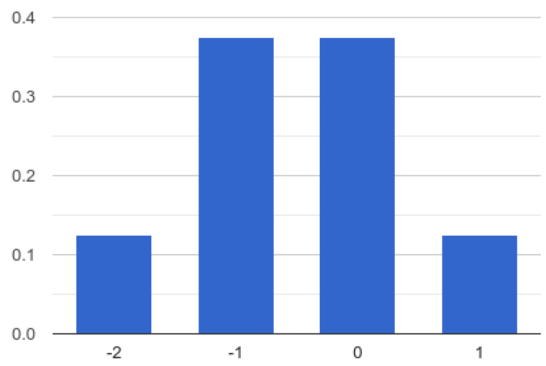
3. Mit welchem Gewinn können Sie rechnen, wenn Sie das Spiel 800-Mal spielen?

$$800 \cdot E(x) = 400$$

4. Die Zufallsvariable Y sei der Gewinn des Spielleiters pro Spiel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und stellen Sie diese grafisch dar.

   Aus Sicht des Spielleiters sehen die möglichen Spielausgänge (Ereignisse) etwas anders aus: $E_{spielleiter} = \{-2, -1, 0, 1\}$. Die weitere Vorgehensweise ist wie oben.

$$f(y) = \begin{cases} 0.125 & x = -2 \\ 0.375 & x = -1 \\ 0.375 & x = 0 \\ 0.125 & x = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$



5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zufallsvariablen X und Y?

   Der Verlust des Spielleiters entspricht dem Gewinn des Spielers:

$$X = -Y$$

6. Wie gross der Erwartungswert und die Varianz von Y?

   Der Erwartungswert ist:

   $$E(Y) = -E(X) = -0.5$$

   Die Varianz bleibt gleich:

   $$\sigma^2 = 0.75$$

7. Angenommen der Spielleiter merkt, dass er auf lange Sicht nur Verluste hat. Was geschieht mit dem Erwartungswert und der Varianz von X, wenn der Einsatz auf 2 CHF bzw. 3 CHF erhöht wird?

   Der Erwartungswert verschiebt sich um -1 CHF bzw. -2 CHF auf $E(X) = -0.5$ bzw. $E(X) = -1.5$.

   Die Varianz bleibt unverändert:

   $$\sigma^2 = 0.75$$

8. Welchen Einsatz muss der Spielleiter mindestens nehmen, damit er keinen Verlust macht?

   Für den Spielleiter muss $E(Y) = 0$ sein, d.h. der Einsatz muss 1.5 CHF betragen.

Übung 4. *Bernoulli-Verteilung*
Bei einer Bernoulli-Verteilung auf $\{0, 1\}$ ist das Ereignis 1 viermal so wahrscheinlich wie das Ereignis 0. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert sowie die Varianz.

Die Summe der Wahrscheinlichkeit ist 1, damit folgt:

$$\begin{aligned} &1 = p + (1 - p) = p + 4p = 5p \\ &p = 0.2 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist damit:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & x = 0 \\ 0.8 & x = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & x = 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Der Erwartungswert:

$$E(x) = p = 0.2$$

Die Varianz:

$$\sigma^2 = p(1-p) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$$

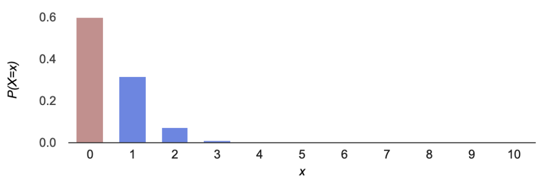
Übung 5. *Binomialverteilung*
Ein Touristikunternehmer bietet in jedem Herbst eine exklusive Kulturreise zu den Schlössern der Loire an. Die Reise erfolgt mit einem Kleinbus, in dem neun Touristen Platz haben. Aus langjähriger Erfahrung weiss der Unternehmer, dass eine jede Buchung in den letzten beiden Tagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% kurzfristig storniert wird. Der Unternehmer hat wegen der kurzfristigen Stornierungen statt neun Buchungen zehn Buchungen entgegengenommen.

Hinweis: Für die Binomialverteilung gibt es Tabellen für beliebige n, p und k. Die Musterlösung deutet die numerische Lösung vollständigkeitshalber an. Sie können jedoch jederzeit Tabellenwerte verwenden!

1. Welches Überbelegungsrisiko geht der Unternehmer ein?

   Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner absagt, und der Unternehmer damit überbucht ist, ist:

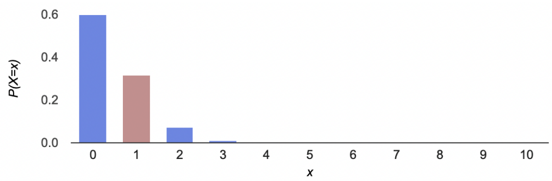
$$P(X = 0) = (1-p)^n = (1-0.05)^10 = 0.599$$



2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Unternehmer mit 9 Mitreisenden ideal belegt

   Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer absagt, ist:

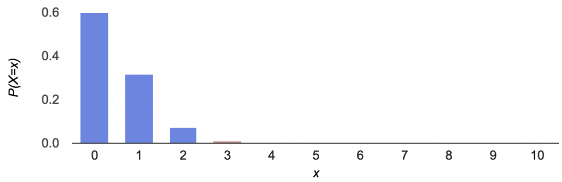
$$P(X = 1) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{1} 0.05 \cdot 0.95^9 = 0.315$$



3. Um in der Gewinnzone zu bleiben, müssen mindestens acht Personen mitfahren. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Unternehmer noch kurzfristig für Ersatzreisende sorgen muss, um nicht in die Verlustzone zu geraten?

   Er kommt also in die Verlustzone, wenn mindestens 3 Gäste absagen. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei absagen, ist:

$$\begin{aligned} P &= 1^{\smile} (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\ &= 1 - (0.599 + 0.315 + 0.075) = 0.011 \end{aligned} \tag{1}$$



   mit:

$$P(X=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{2} 0.05^2 \cdot 0.95^8 = 0.075$$

4. Mit wie vielen Stornierungen hat er durchschnittlich zu rechnen?

$$E(x) = np = 10 \cdot 0.05 = 0.5$$

Übung 6. *Poissonverteilung*

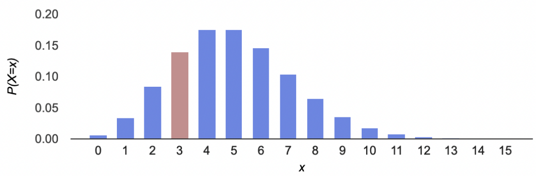
Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden in Süddeutschland die Hotline SD eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an. Die Hotline ist so besetzt, dass sie in dieser Zeitspanne 9 Anrufe entgegennehmen kann.

Hinweis: Für die Poissonverteilung gibt es Tabellen für beliebige u und k. Die Musterlösung deutet die numerische Lösung vollständigkeitshalber an. Sie können jedocher jederzeit Tabellenwerte verwenden!

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 20:00 und 21:00 Uhr drei Kunden anrufen?

Es liegt eine Poissonverteilung vor. Mit $\mu = 5$ und $k = 3$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 anrufen zu:

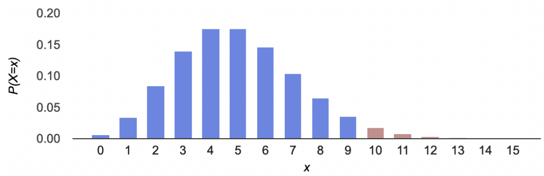
$$P(3) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-5}\frac{5^3}{3!} = 0.14$$



2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotline überlastet ist?

   Die Hotline ist überlastet, wenn mehr als 9 anrufen.

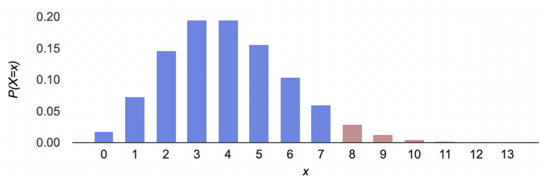
$$P = 1 - P(X \leq k = 9) = 1 - e^{-\mu}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mu^i}{i!} = 1 - e^{-5}\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!} = 0.0318$$



3. Bei der Hotline OD für die Kunden in Ostdeutschland gehen zwischen 20.00 und 21.00 durchschnittlich 4 Anrufe ein; es können 7 Anrufe entgegengenommen werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Hotlines überlastet ist?

   Die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotline OD überlastet ist, ist:

$$P = 1 - P(X \leq k = 7) = 1 - e^{-\mu}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mu^i}{i!} = 1 - e^{-4}\sum_{i=0}^{9}\frac{4^i}{i!} = 0.0511$$



   Wir gehen von unabhängigen Ereignissen A und B aus und berechnen die Wahrscheinlihckeit, dass beide Hotlines überlastet sind, mit dem Additionssatz:

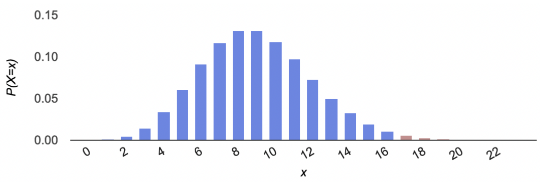
$$P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$P = 0.0318 + 0.0511 - 0.0318 \cdot 0.0511 = 0.0813$$

4. Kann durch eine Zusammenlegung der beiden Hotlines die Wahrscheinlichkeit der Überlastung gesenkt werden?

   Durch die Eigenschaft der Reproduktivität der Poissonverteilung addieren sich die Ankunftsraten zur neuen Ankunftsrate $\mu = 5 + 4 = 9$.

   Mit nun $k = 9 + 7 = 16$ Servicekräften beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung:

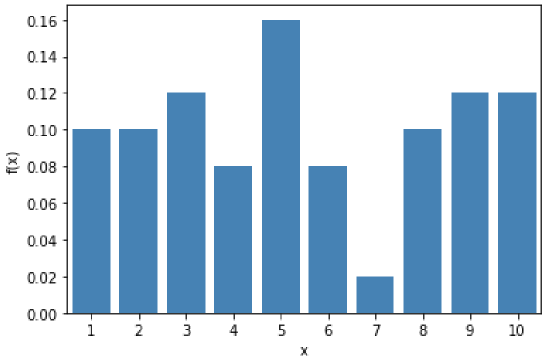
$$P = 1 - P(X \leq k = 16) = 1 - e^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} = 1 - e^{-9} \sum_{i=0}^{16} \frac{9^i}{i!} = 0.0111$$



   Durch die Zusammenlegung kann die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung deutlich von 8.13% auf 1.11% gesenkt werden. Dieser Effekt wird auch Bündelungsgewinn bezeichnet.

Zusatzaufgaben

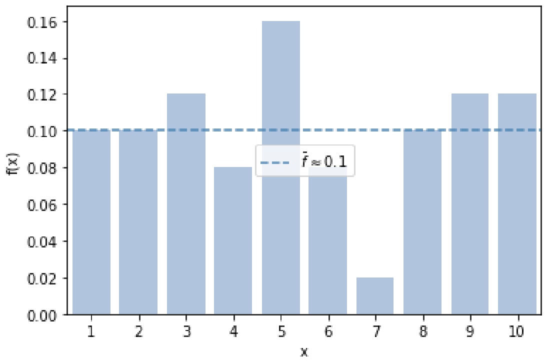
Übung 7. *Empirische Verteilung*
Sie haben die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion einer empirischen Verteilung:



1. Schätzen Sie den Erwartungswert.

   Aus dem Diagramm schätzen wir die mittlere Wahrscheinlichkeit auf $\bar{f} \approx 0.1$ und approximieren damit den Erwartungswert:

   $$E(x) \approx \bar{f} \sum x = 5.5$$



2. Berechnen Sie den Erwartungswert ausgehend von der folgenden Urlist:

$$\begin{aligned} x_i = (&5, 6, 8, 10, 1, 2, 9, 10, 3, 4, 9, 5, 3, 9, 3, 5, 7, \\ &6, 1, 1, 9, 8, 9, 6, 9, 4, 5, 8, 2, 4, 2, 5, 10, 2, \\ &4, 5, 10, 3, 6, 3, 1, 8, 1, 3, 5, 5, 2, 10, 8, 10) \end{aligned}$$

i	x_i	h_i	f_i	$x_i f_i$
1	1	5	0.10	0.10
2	2	5	0.10	0.20
3	3	6	0.12	0.36
4	4	4	0.08	0.32
5	5	8	0.16	0.80
6	6	4	0.08	0.48
7	7	1	0.02	0.14
8	8	5	0.10	0.80
9	9	6	0.12	1.08
10	10	6	0.12	1.20
		50		5.45

$$E(x) = \sum_i x_i f(x_i) = 5.48$$

Übung 8. *Hypergeometrische Verteilung*
In einer früheren Aufgabe haben Sie die Wahrscheinlichkeit berechnet, beim Schweizer Lotto (6 aus 42) 3 Richtige zu ziehen. Das Ziehen von Lottozahlen folgt der hypergeometrischen Verteilung: Aus einer Menge von N Elementen, davon M günstige Elemente und $N-M$ ungünstige Elemente, wird eine Stichprobe der Grösse n ohne zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei k günstige Elemente gezogen werden, ist:

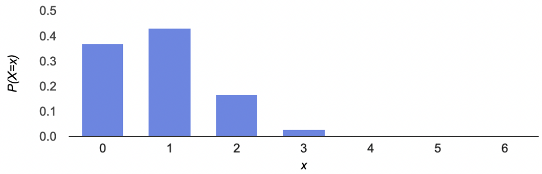
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, $k = 3$ Richtige von insgesamt $M = 6$ Richtigen bei $n = 6$ Zahlen aus insgesamt $N = 42$ Zahlen zu ziehen:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{42-6}{6-3}}{\binom{42}{6}} = 0.027$$

Sie haben die folgende Tabelle für $N = 42$, $M = 6$ und $n = 6$:

k	$P(k)$
0	$3.7 \cdot 10^{-1}$
1	$4.3 \cdot 10^{-1}$
2	$1.7 \cdot 10^{-1}$
3	$2.7 \cdot 10^{-2}$
4	$1.8 \cdot 10^{-3}$
5	$4.2 \cdot 10^{-5}$
6	$1.9 \cdot 10^{-7}$



1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 3 Richtige zu ziehen?

$$P(3 \leq X \leq 6) = \sum_{i=3}^{6} P(i) = 2.9 \cdot 10^{-2}$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, maximal 5 Richtige zu ziehen?

$$P(0 \leq X \leq 5) = 1 - P(6) = 2.9 \cdot 10^{-2} = 0.99999981 \approx 1$$

3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1, aber maximal 3 Richtige zu ziehen?

$$P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{i=1}^{3} P(i) = 6.3 \cdot 10^{-1}$$

Übung 9. *Binomialverteilung*
Ein Glücksrad ist in 9 gleichgrosse Abschnitte eingeteilt, die mit den Zahlen 1 bis 9 durchnummeriert sind.

Hinweis: Für die Binomialverteilung gibt es Tabellen für beliebige n, p und k. Die Musterlösung deutet die numerische Lösung vollständigkeitshalber an. Sie können jedoch jederzeit Tabellenwerte verwenden!

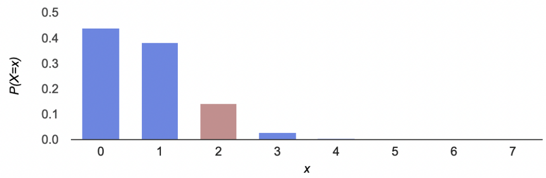
1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad zweimal im Feld 8 stehen bleibt?

   Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rad auf Feld 8 stehen bleibt ist $p = 1/9$. Das Rad wird siebenmal gedreht, damit ist $n = 7$. Bei jeder Drehung kann das Feld 8 getroffen werden.

   Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Feld 8 genau 2 mal getroffen wird, das heisst es muss genau 2 mal getroffen werden und 7 mal nicht, es gibt ferner $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten das Feld 8 zu treffen.

   Damit wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung gegeben:

$$P(X = 2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^5 = 0.144$$

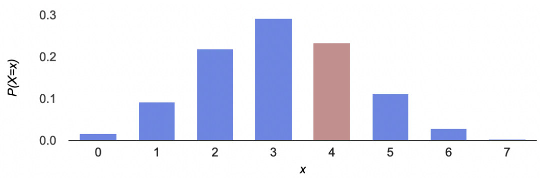


2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad viermal in einem Feld mit einer graden Nummer stehen bleibt?

   Auch hier handelt sich um eine Binomialverteilung. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Rad auf einem bestimmten Feld stehen bleibt, ändert sich von Drehen zu Drehen nicht, die Ergebnisse der Drehungen sind unabhängig.

   Das beschriebene Glücksrad hat 4 Felder mit graden Nummern, die Wahrscheinlichkeit, dass es beim einmaligen Drehen auf einem Feld mit einer graden Nummer stehen bleibt, ist somit $p = 4/9$. Aufgrund des siebenmaligen Drehens ist $n = 7$, gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für $k = 4$:

$$P(X=4) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{7}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{9}\right)^3 = 0.234$$



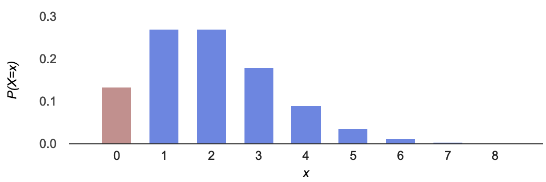
Übung 10. *Poissonverteilung*
An einer Kreuzung kommt es pro Jahr zu durchschnittlich 2 Autounfälle.

Wir haben mit der Angabe der Rate eine diskrete Verteilung vorliegen. Wir können weiterhin annehmen, dass die Anzahl aller Autos, die diese Kreuzung passieren sehr gross und die Wahrscheinlichkeit eines Unfalls klein ist. Damit dürfen wir diese Situation durch eine Poissonverteilung beschreiben mit der Rate $\mu = 2$ Unfällen pro Jahr.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es dieses Jahr

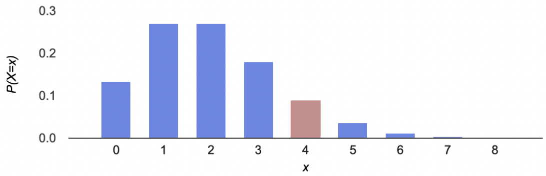
1. zu keinem Unfall kommt,

$$P(X=0) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0.135$$



2. zu vier Unfällen kommt,

$$P(X = 4) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = 0.009$$



3. zu weniger als drei Unfällen kommt.

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \\ &= 0.135 + 0.271 + 0.271 = 0.677 \end{aligned} \tag{2}$$