

MATHEMATISCHER FITNESSTEST FÜR DEN EINTRITT IN DIE OST – OSTSCHWEIZER FACHHOCHSCHULE

Der folgende Fitnesstest enthält eine Reihe von Aufgabentypen, die beim Übertritt in eine Fachhochschule als bekannt vorausgesetzt werden. Die dem Test zugrunde liegenden Rechengesetze werden in unseren Mathematikvorlesungen häufig verwendet, ohne dort noch einmal besprochen zu werden.

Um erfolgreich an unseren Vorlesungen teilnehmen zu können, müssen Sie allerdings nicht alle Aufgaben komplett fehlerfrei lösen. Die aufgeführten Aufgabentypen und die in den Aufgaben verwendeten Rechengesetze sollten Ihnen aber aus Ihrer Schulzeit vertraut sein. Wenn dies nicht der Fall ist, wenn Ihre Mathematikausbildung schon länger zurück liegt oder wenn Sie in der Schule Schwierigkeiten mit Mathematik hatten, empfehlen wir Ihnen vor Studienbeginn Ihr Mathematikwissen noch einmal aufzufrischen. Alternativ zum Selbststudium können Sie zu diesem Zweck im Sommer auch unseren 2-wöchigen *Aufbaukurs Mathematik* besuchen.

Aufgabe 1.

Berechnen Sie

$$(1 + \sqrt{2})^5 + (1 - \sqrt{2})^5$$

Ergebnis

82

Lösungsweg:

Die Summanden können mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes ausgerechnet werden. Dabei verwenden wir das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5 \\ (1 - \sqrt{2})^5 &= 1 - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 - 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 - \sqrt{2}^5 \\ (1 + \sqrt{2})^5 + (1 - \sqrt{2})^5 &= 2 + 20\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^4 \\ &= 2 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 82 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.

Berechnen Sie

a)

$$\frac{8^{\frac{4}{3}} \sqrt{2}}{2^{-\frac{3}{2}}}$$

b)

$$\log_{10} \left(\frac{100}{\sqrt[3]{10}} \right)$$

Ergebnis

a)

64

b)

$\frac{5}{3}$

Lösungsweg:

a)

$$\frac{8^{\frac{4}{3}} \sqrt{2}}{2^{-\frac{3}{2}}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 2^6 = 64$$

b)

$$\log_{10} \left(\frac{100}{\sqrt[3]{10}} \right) = \log_{10}(100) - \log_{10} \left(10^{\frac{1}{3}} \right) = 2 - \frac{1}{3} \log_{10}(10) = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

□

Aufgabe 3.

Berechnen Sie

a)

$$\sin^2(120^\circ) + \cos(240^\circ) + \tan(315^\circ)$$

b) alle Winkel im Bogenmass zwischen 0 und 2π , deren Sinus -0.5 ergibt.

c) den Winkel zwischen 0° und 90° , dessen Sinus gleich $\cos(1000^\circ)$ ist.

Ergebnis

a)

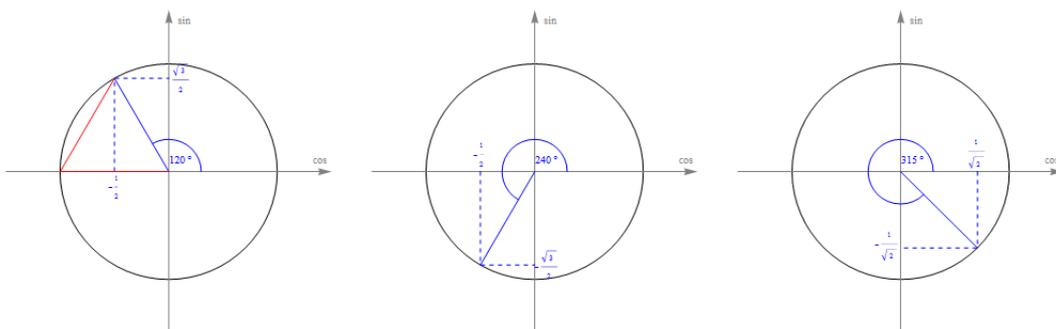
$$-\frac{3}{4}$$

b) $x = \frac{7\pi}{6}$ und $x = \frac{11\pi}{6}$

c) 10°

Lösungsweg:

- a) Die Sinus und Kosinuswerte aller drei Winkel lassen sich am Einheitskreis ablesen. Dazu zeichnen wir zunächst einen Kreis mit Radius 1 um den Koordinatenursprung. Danach tragen wir den gewünschten Winkel ausgehend von der positiven Ordinatenachse im mathematisch positiven Drehsinn (!) ab. Dabei entsteht ein Schnittpunkt mit dem Einheitskreis, an dem wir die gewünschten Sinus und Cosinuswerte direkt ablesen können.



- Ganz links sehen wir die Konstruktion für den $\sin(120^\circ)$. Der im mathematisch positiven Drehsinn abgetragene Winkel ist blau eingezeichnet. Diese Linie lässt sich mit den roten Linien zu einem Dreieck ergänzen, in dem die beiden vom Ursprung ausgehenden Seiten jeweils die Länge 1 haben und miteinander den Winkel $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ einschliessen. Wir haben es damit mit einem gleichseitigen Dreieck zu tun, dessen Höhe gerade dem $\sin(120^\circ)$

entspricht. Es gilt also

$$\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Eine ähnliche Konstruktion (mittleres Bild) erlaubt es $\cos(240^\circ)$ zu bestimmen. Auch hier gibt es wieder ein gleichseitiges Dreieck (wo?). Berücksichtigen wir ausserdem, dass Cosinuswerte für Winkel zwischen 90° und 270° negativ sind, ergibt sich daraus

$$\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$$

- Der rechts dargestellte Winkel von 315° lässt sich durch einen Winkel von 45° zum Vollkreis ergänzen. Daraus ergibt sich, dass die blaue Linie die Grundseite eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks ist und den Wert 1 besitzt (Finden Sie dieses Dreieck!). Sinus und Cosinus entsprechen dann gerade den beiden Katheten dieses Dreiecks und betragen

$$\sin(315^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Daraus lässt sich nun aber der Tangens berechnen. Wir erhalten

$$\tan(315^\circ) = \frac{\sin(315^\circ)}{\cos(315^\circ)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

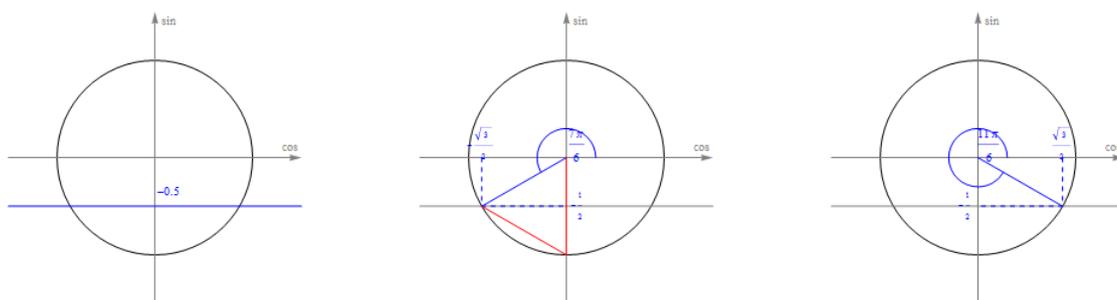
- Nun haben wir alle Informationen, um die Aufgabe zu lösen

$$\begin{aligned} \sin^2(120^\circ) + \cos(240^\circ) + \tan(315^\circ) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) Wir müssen die Gleichung

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

im Bogenmass lösen. Auch diese Aufgabe lässt sich am Einheitskreis bewerkstelligen.



Dazu suchen wir auf der Sinusachse den Wert -0.5 und fragen uns, für welche Winkel zwischen 0 und 2π dieser Wert als Sinus angenommen wird. Diese Winkel entsprechen gerade den Schnittpunkte des Einheitskreises mit der blauen Geraden in der linken Zeichnung. Es gibt zwei Schnittpunkte, deren Winkel in den beiden folgenden Diagrammen eingezeichnet sind. Ähnlich, wie in der vorangegangenen Aufgabe, gibt es in dieser Situation wieder gleichseitige Dreiecke, die eine exakte Lösung der Aufgaben ermöglichen. In der Mitte ist das entsprechende Dreieck mit einer blauen und zwei roten Seiten eingezeichnet (wo ist es im rechten Fall?). Der gesuchte Winkel muss also $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ betragen. Im zweiten Fall verfährt man analog. Die Gleichung hat damit zwei Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$, nämlich $x = \frac{7\pi}{6}$ und $x = \frac{11\pi}{6}$.

c) Wir versuchen zunächst, $\cos(1000^\circ)$ mithilfe des Cosinus eines Winkels, der zwischen 0° und 90° liegt auszudrücken. Dabei verwenden wir die folgenden Regeln:

- Der Cosinus verändert seinen Wert nicht, wenn sein Argument um 360° vergrößert oder verkleinert wird. Es gilt also

$$\begin{aligned}\cos(1000^\circ) &= \cos(1000^\circ - 3 \cdot 360^\circ) \\ &= \cos(-80^\circ)\end{aligned}$$

- Wird vom Argument des Cosinus das Vorzeichen gekehrt, so ändert der Cosinus seinen Wert nicht

$$\cos(-80^\circ) = \cos(80^\circ)$$

Als letztes verwenden wir die Formel $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ und erhalten damit

$$\cos(1000^\circ) = \cos(80^\circ) = \sin(10^\circ)$$

Der gesuchte Winkel ist damit 10° .

□

Aufgabe 4.

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{x | x(x-2)(x-4)(x-6) = 0\}$. Die Grundmenge sei $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Die leere Menge wird mit \emptyset bezeichnet.

- Bestimmen Sie $\overline{A \cup B}$
- Schreiben Sie alle Teilmengen von A auf.
- Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?

$$\begin{array}{cccc} 0 \in \{0\} & 0 \subset \{0\} & \{0\} \in \{0\} & \{0\} \subset \{0\} \\ \emptyset \in \{0\} & \emptyset \subset \{0\} & \emptyset \in \{\emptyset\} & \emptyset \subset \{\emptyset\} \end{array}$$

Ergebnis

a)

$$\{5, 7, 8, 9\}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{3\} \\ \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

c) Richtig sind die Aussagen $0 \in \{0\}$, $\{0\} \subset \{0\}$, $\emptyset \subset \{0\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ und $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, falsch sind die Aussagen $0 \subset \{0\}$, $\{0\} \in \{0\}$ und $\emptyset \in \{0\}$.

Lösungsweg:

Die Grundmenge ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ausserdem gilt

$$\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{0, 2, 4, 6\} \end{array}$$

Daraus ergibt sich

a)

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}} = \{5, 7, 8, 9\}$$

b) Die Teilmengen von A sind

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{3\} \\ \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

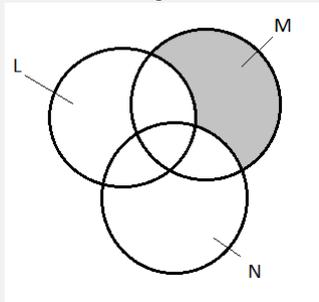
c) Richtig sind die Aussagen $0 \in \{0\}$, $\{0\} \subset \{0\}$, $\emptyset \subset \{0\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
Falsch ist dagegen

- $0 \subset \{0\}$, da 0 keine Menge ist.
- $\{0\} \in \{0\}$, da nur das Element 0, nicht aber das Element $\{0\}$ in der Menge $\{0\}$ enthalten ist.
- $\emptyset \in \{0\}$ aus demselben Grund

□

Aufgabe 5.

- a) Welche Menge ist in der schraffierten Fläche dargestellt?

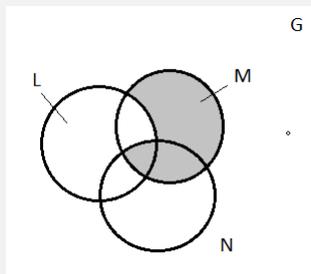


- b) Schraffieren Sie die Menge $M \cap (N \cup \bar{L})$ in einem Mengendiagramm.

Ergebnis

- a) Verschiedene Antworten sind möglich. Z.B.

$$M \setminus (L \cup N) = M \cap \overline{(L \cup N)} = M \cap \bar{L} \cap \bar{N}$$



b)

Lösungsweg:

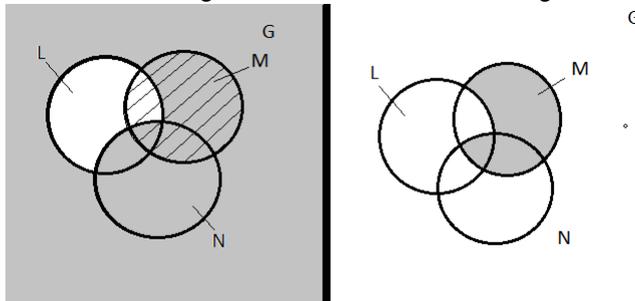
- a) Die Menge enthält alle Elemente aus M , die nicht auch noch in L oder N enthalten sind. D.h. die Elemente aus $L \cup N$ müssen ausgeschlossen werden. Die schraffierte Menge ist damit

$$M \setminus (L \cup N)$$

Es gibt auch andere Darstellungen dieser Menge, z.B. $M \cap \overline{(L \cup N)}$ oder $M \cap \bar{L} \cap \bar{N}$.

- b) Im linken Teil der Abbildung ist die Menge $N \cup \bar{L}$ grau hinterlegt. Sie besteht aus allen Elementen der Grundmenge, die nicht in L liegen, zuzüglich aller Elemente aus N . Schraffiert dargestellt ist ausserdem die Menge M . Im rechten Diagramm ist nun die Schnittmenge $M \cap (N \cup \bar{L})$ dargestellt, welche die gemeinsamen Elemente aus M und $N \cup \bar{L}$, also all diejenigen Objekte,

die links sowohl grau als auch schraffiert dragestellt waren, enthält.



□

Aufgabe 6.

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit, wie möglich

a)

$$\frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{4a^2-9} + \frac{5}{4a^2+2a-6}$$

b)

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$$

c)

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab^3}}{a^{-3}b}}$$

d)

$$\ln(x^2 - y^2) + \ln\left(\frac{1}{x-y}\right) - \ln((x+y)^2)$$

Ergebnis

a)

$$\frac{1}{(2a-3)(2a-2)}$$

b)

$$\sqrt{1-x^2}$$

c)

$$\sqrt[6]{a^7b}$$

d)

$$-\ln(x+y)$$

Lösungsweg:

- a) Um den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bilden, zerlegen wir zunächst die Nenner des 2. und 3. Bruches in Faktoren (1). In der 2. Zeile bilden wir dann zunächst den Hauptnenner (2) und vereinfachen den Zähler (3).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{4a^2-9} + \frac{5}{4a^2+2a-6} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{(2a-3)(2a+3)} + \frac{5}{(2a+3)(2a-2)} \\ \stackrel{(2)}{=} & \frac{(2a+3)(2a-2) - 6(a-1)(2a-2) + 5(2a-3)(a-1)}{(2a-3)(a-1)(2a+3)(2a-2)} \stackrel{(3)}{=} \frac{(4a^2+2a-6) - (12a^2-24a+12) + (10a^2-25a+15)}{(2a-3)(a-1)(2a+3)(2a-2)} \\ & = \frac{2a^2+a-3}{(2a-3)(a-1)(2a+3)(2a-2)} \stackrel{(4)}{=} \frac{(a-1)(2a+3)}{(2a-3)(a-1)(2a+3)(2a-2)} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{(2a-3)(2a-2)} \end{aligned}$$

Bei der abschliessenden Faktorzerlegung des Zählers (4) zeigt sich, dass wir den Zähler und Nenner noch durch einander kürzen können (5).

- b) Zunächst betrachten wir nur den Nenner des Bruches. Dieser lässt sich folgender Massen umformen.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1-x^4} + 1}{\sqrt{1-x^4}}$$

Setzen wir diese Umformung in die Aufgabe ein, so entsteht ein Doppelbruch. Diesen können wir vermeiden, in dem wir den neu entstandenen "Nenner des Nenners" $\sqrt{1-x^4}$ als zusätzlichen Faktor in den Zähler schreiben (1). Bei der folgenden Vereinfachung des Zählers mit Hilfe der Wurzelgesetze (2) - (4) entsteht ein gemeinsamer Faktor (5), durch den wir abschliessend kürzen können (6).

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4} + 1} \stackrel{(2)}{=} \frac{\sqrt{1-x^4}\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{1-x^4}{1+x^2}}}{\sqrt{1-x^4} + 1} = \\ & \stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt{1-x^4}\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1+x^2}}}{\sqrt{1-x^4} + 1} \stackrel{(4)}{=} \frac{\sqrt{1-x^4}\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4} + 1} \\ & \stackrel{(5)}{=} \frac{(\sqrt{1-x^4} + 1) \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4} + 1} \stackrel{(6)}{=} \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

c)

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab^3}}{a^{-3}b}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{ab^3}{a^{-6}b^2}}} = \sqrt[6]{a^6 \cdot a \cdot b^3 \cdot b^{-2}} = \sqrt[6]{a^7 b}$$

d)

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - y^2) + \ln\left(\frac{1}{x-y}\right) - \ln((x+y)^2) &= \ln\left(\frac{(x^2 - y^2) \left(\frac{1}{x-y}\right)}{(x+y)^2}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}\right) = \ln\left(\frac{1}{(x+y)}\right) = -\ln(x+y) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7.

Vereinfachen Sie soweit als möglich

a)

$$(\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2}{\tan(x) + \cot(x)}$$

b)

$$\frac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos(x + \pi) + \cos(x + 2\pi) + \cos(x + 3\pi)}$$

Ergebnis

a)

1

b)

-2

Lösungsweg:

- a) Diese Aufgabe ist eine Anwendung des trig. Satzes des Pythagoras, d.h. von $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. In der Lösung verwenden wir dabei die gebräuchliche Notation $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$, um Klammern zu sparen. Als erstes multiplizieren wir das Binom aus und ersetzen Tangens und Cotangens durch Sinus- und Cosinusausrücke (1). Danach wenden wir den trig. Pythagoras an und vereinfachen den Nenner des Bruches (2). Nach diesem Schritt können wir den trig. Pythagoras ein zweites mal verwenden (3), woraus dann das gesuchte Ergebnis folgt (4).

$$\begin{aligned} (\sin(x) + \cos(x))^2 - \frac{2}{\tan(x) + \cot(x)} &\stackrel{(1)}{=} \underbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}_{=1} + 2 \sin(x) \cos(x) - \frac{2}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \\ &\stackrel{(2)}{=} 1 + 2 \sin(x) \cos(x) - \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \stackrel{(3)}{=} 1 + 2 \sin(x) \cos(x) - \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1} \stackrel{(4)}{=} 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos(x + \pi) + \cos(x + 2\pi) + \cos(x + 3\pi)} &= \frac{-\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)}{-\cos(x) + \cos(x) - \cos(x)} = \\ &= \frac{2 \cos(x)}{-\cos(x)} = -2 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.

Vereinfachen Sie soweit wie möglich

a)

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{4}{5}}}{\left(a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}}}$$

b)

$$\frac{2 \sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ)}{\tan(\alpha + 90^\circ) - \cot(\alpha - 180^\circ)}$$

c)

$$2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \tan^2(x)}$$

d) Schreiben Sie den folgenden Term mit so wenigen Logarithmen, wie nötig

$$\frac{2 \ln(x) - \frac{1}{3} \ln(y) + \ln(y^3) + \frac{3}{4} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x+y) \ln(x-y)}$$

Ergebnis

a)

$$a^{-\frac{7}{30}} b^{-\frac{1}{2}}$$

b)

$$-\frac{\sin(\alpha)}{2}$$

c)

$$\sin^2(x) + 1$$

d)

$$\frac{\ln(x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{8}{3}})}{\ln(x+y) \ln(x-y)}$$

Lösungsweg:

a)

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{4}{5}}}{\left(a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}} b^{-\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{5}} = a^{\frac{20-27}{30}} b^{-\frac{-8+3}{10}} = a^{-\frac{7}{30}} b^{-\frac{1}{2}}$$

b)

$$\frac{2 \sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ)}{\tan(\alpha + 90^\circ) - \cot(\alpha - 180^\circ)} = \frac{2 \cos(\alpha) - \cos(\alpha)}{-\cot(\alpha) - \cot(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{-2 \cot(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{-2 \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} = -\frac{\sin(\alpha)}{2}$$

c)

$$\begin{aligned}
 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \tan^2(x)} &= 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \\
 &= 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4 \cos^2(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 2 \sin^2(x) - 3 \cos^2(x) + \frac{4 \cos^2(x)}{1} = \\
 &= 2 \sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + 1
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \ln(x) - \frac{1}{3} \ln(y) + \ln(y^3) + \frac{3}{4} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x+y) \ln(x-y)} &= \frac{2 \ln(x) - \frac{1}{3} \ln(y) + 3 \ln(y) - \frac{3}{4} \ln(x)}{\ln(x+y) \ln(x-y)} = \\
 &= \frac{\frac{5}{4} \ln(x) + \frac{8}{3} \ln(y)}{\ln(x+y) \ln(x-y)} = \frac{\ln(x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{8}{3}})}{\ln(x+y) \ln(x-y)}
 \end{aligned}$$

eine weitere Vereinfachung (vor allem des Nenners) ist nicht möglich.

□

Aufgabe 9.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf

a)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = \frac{4}{21}$$

b)

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{3})^{x-1}} - 1 = \sqrt{2}$$

c)

$$\frac{a}{x^2 - a^2} + \frac{b}{x^2 - ax} = \frac{c}{x^2 + ax}$$

bei dieser Aufgabe müssen keine Spezialfälle berücksichtigt werden.

Ergebnis

a)

$$x = \frac{2}{5}$$

b)

$$x = 1 - \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln(1 + \sqrt{3})}$$

c)

$$x = \frac{a(b+c)}{c-a-b}$$

Lösungsweg:

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} &= \frac{4}{21} && | + \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} - \frac{4}{21} \\
 \Leftrightarrow \frac{\frac{7}{21} - \frac{4}{21}}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} &= \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} && | \text{Kehrwert} \\
 \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{21} = \frac{1}{7}}{7} &= \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} && | - 7 + \frac{1}{5x+11} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{5x+11} &= \frac{1}{13} && | \text{Kehrwert} \\
 \Leftrightarrow 5x + 11 &= 13 && | - 11 | : 5 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+\sqrt{3})^{x-1}} - 1 &= \sqrt{2} && | + 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+\sqrt{3})^{x-1}} &= 1 + \sqrt{2} && | \text{Kehrwert} \\
 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})^{x-1} &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} && | \ln \text{ anwenden} \\
 \Leftrightarrow (x-1) \ln(1 + \sqrt{3}) &= \ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) && | : \ln(1 + \sqrt{3}) | + 1 \\
 \Leftrightarrow x &= 1 - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\ln(1+\sqrt{3})}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{x^2-a^2} + \frac{b}{x^2-ax}}{\frac{a}{(x-a)(x+a)} + \frac{b}{x(x-a)}} &= \frac{c}{x^2+ax} && | \text{Nenner faktorisieren} \\
 \Leftrightarrow \frac{ax + b(x+a)}{(a+b)x + ba} &= \frac{c(x-a)}{cx - ca} && | \cdot x(x-a)(x+a) \\
 \Leftrightarrow (a+b)x + ba &= cx - ca && | \text{als Polynom von } x \text{ schreiben} \\
 \Leftrightarrow (a+b-c)x &= -ba - ca && | - cx - ba \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{-ab-ac}{a+b-c} = \frac{a(b+c)}{c-a-b} && | : (a+b-c)
 \end{aligned}$$

Bei dieser Aufgabe gibt es einige Spezialfälle. Z.B. darf x die Werte $0, a, -a$ nicht annehmen. Auch der Fall $c = a + b$ muss gesondert behandelt werden. In diesem Fall gibt es keine Lösung, wenn sowohl $a \neq 0$ als auch $b + c \neq 0$ oder unendlich viele Lösungen, wenn $a = 0$ oder $b + c = 0$ ist.

□

Aufgabe 10.

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

a)

$$\frac{11}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln(x^2 + e)}$$

b)

$$\frac{\sqrt{3x+3}+1}{\sqrt{5x-6}} = 1$$

c)

$$\frac{1}{5-2x} > \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

Ergebnis

- a) Definitionsmenge: \mathbb{R}
Lösungsmenge: \emptyset .
- b) Definitionsmenge: $(\frac{6}{5}; \infty)$
Lösungsmenge: $\{11\}$.
- c) Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$
Lösungsmenge: $(-\infty; \frac{5}{2}) \cup (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$

Lösungsweg:

- a) Das Argument des Logarithmus ist stets grösser als e . Deshalb kann der Nenner nicht Null werden. Die Definitionsmenge der Gleichung ist also \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln(x^2+e)} && | -\frac{4}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{6} &= \frac{1}{\ln(x^2+e)} && | \text{Kehrwert} \\ \Leftrightarrow \frac{6}{7} &= \ln(x^2+e) && | \text{Exponentieren} \\ \Leftrightarrow e^{\frac{6}{7}} &= x^2+e && | -e \\ \Leftrightarrow e^{\frac{6}{7}} - e &= x^2 \end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine negative Zahl. Da eine Quadratzahl nie negativ werden kann ist die Lösungsmenge also die leere Menge \emptyset .

- b) Die Wurzel akzeptiert nur positive Argumente. Die Wurzel des Zählers verlangt deshalb $3x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Die des Nenners verlangt $5x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{5}$. Da der Nenner ausserdem nicht Null werden darf muss sogar gelten, dass $x > \frac{6}{5}$. Die Definitionsmenge ist also das Intervall

$(\frac{6}{5}; \infty)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{3x+3}+1}{\sqrt{5x-6}} = 1 && | \cdot \sqrt{5x-6} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3x+3}+1 = \sqrt{5x-6} && | \text{quadrieren} \\
 \Rightarrow & (\sqrt{3x+3}+1)^2 = 5x-6 && | -3x-4 \\
 & \frac{3x+3+1+2\sqrt{3x+3}}{2\sqrt{3x+3}} = 2x-10 && | :2 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3x+3} = x-5 && | \text{quadrieren} \\
 \Rightarrow & 3x+3 = \underbrace{(x-5)^2}_{=x^2-10x+25} && | -3x-25 \\
 \Leftrightarrow & -22 = x^2-13x && | \text{quadrat erg\u00e4nzen} \\
 \Leftrightarrow & -22 = (x-\frac{13}{2})^2 - (\frac{13}{2})^2 && | + (\frac{13}{2})^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{169}{4} - \frac{88}{4} = (x-\frac{13}{2})^2 && | \text{Wurzel ziehen} \\
 & \frac{81}{4} = (\frac{9}{2})^2 \\
 \Leftrightarrow & \pm \frac{9}{2} = x - \frac{13}{2} && | + \frac{13}{2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{13 \pm 9}{2} = x
 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also zwei m\u00f6gliche L\u00f6sungen: $x = 11$ und $x = 2$. Beide L\u00f6sungen liegen in der Definitionsmenge. Es kann aber sein, dass durch das Quadrieren Scheinl\u00f6sungen entstanden sind. Wir ben\u00f6tigen also eine Probe:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3 \cdot 11 + 3} + 1}{\sqrt{5 \cdot 11 - 6}} &= \frac{\sqrt{36} + 1}{\sqrt{49}} = \frac{6 + 1}{7} = 1 \\
 \frac{\sqrt{3 \cdot 2 + 3} + 1}{\sqrt{5 \cdot 2 - 6}} &= \frac{\sqrt{9} + 1}{\sqrt{4}} = \frac{3 + 1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

Die L\u00f6sung $x = 2$ ist also eine Scheinl\u00f6sung. Die L\u00f6sungsmenge ist demnach $\{11\}$.

- c) Der Nenner darf nicht Null werden. Die Definitionsmenge ist demnach $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$. Da $1 - \sqrt{2} < 0$ ist die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{1}{5-2x} > \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

negativ. Da f\u00fcr $x < \frac{5}{2}$ die linke Seite aber positiv ist, ist die Gleichung in diesem Fall stets erf\u00fcllt. F\u00fcr $x > \frac{5}{2}$ sind beide Seiten der Gleichung negativ. Da nun aber das Produkt $(1 - \sqrt{2})(5 - 2x)$ positiv ist, erhalten wir in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5-2x} &> \frac{1}{1-\sqrt{2}} && | \cdot (1-\sqrt{2})(5-2x) \\
 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} &> 5-2x && | +2x-1+\sqrt{2} \\
 \Leftrightarrow 2x &> 4+\sqrt{2} && | :2 \\
 \Leftrightarrow x &> 2+\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Nun ist $2 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ und damit ist die Gleichung in diesem Fall nur f\u00fcr $x > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ erf\u00fcllt. Fassen wir beide F\u00e4lle zusammen, so ergibt sich damit f\u00fcr die L\u00f6sungsmenge $(-\infty; \frac{5}{2}) \cup (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$

□

Aufgabe 11.

- a) Für welche Zahlen a hat die Gleichung

$$\frac{5}{4}x^2 - (2a^2 - 3)x + a^2 + 1 = 0$$

genau eine Lösung.

- b) Lösen Sie die Gleichung

$$\ln^2(x) + 1 = \ln(x^2) + a^2$$

nach x auf.

- c) Der Sektor eines Kreises mit Radius 3cm hat einen Flächeninhalt von 9cm^2 . Wie gross ist der Winkel des Kreissektors im Bogenmass und wie gross ist die Länge des Kreisbogens.

Ergebnis

a)

$$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$$

b)

$$x = e^{1 \pm a}$$

- c) Winkel des Kreissektors im Bogenmass: 2
Länge des Kreisbogens: 6cm .

Lösungsweg:

- a) Die Gleichung

$$\frac{5}{4}x^2 - (2a^2 - 3)x + a^2 + 1 = 0$$

ist eine quadratische Gleichung. Die Lösungen lassen sich deshalb mit Hilfe der Formel

$$x_{1,2} = \frac{2a^2 - 3 \pm \sqrt{(2a^2 - 3)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} (a^2 + 1)}}{2 \cdot \frac{5}{4}}$$

angeben. Damit die Gleichung genau eine Lösung hat, muss die Diskriminante

$$(2a^2 - 3)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} (a^2 + 1) = 0$$

sein. Diese Gleichung müssen wir nun nach a auflösen:

$$\begin{aligned} (2a^2 - 3)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} (a^2 + 1) &= 0 && | \text{vereinfachen} \\ \Leftrightarrow 4a^4 - 17a^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Auch hier haben wir es wieder mit einer quadratischen Gleichung zu tun. Allerdings in der Variable $u = a^2$. Die Lösungen sind damit

$$u_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8} = \left\{ \frac{1}{4} \right.$$

Die entsprechenden Werte für a sind demnach $\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ und $\pm\sqrt{4}$, d.h. die Zahlen $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$

b)

$$\ln^2(x) + 1 = \underbrace{\ln(x^2)}_{2 \ln(x)} + a^2 \quad | - 2 \ln(x) - a^2$$

$$\Leftrightarrow \ln^2(x) - 2 \ln(x) + 1 - a^2 = 0$$

Wir haben es wieder mit einer quadratischen Gleichung zu tun. Die Lösungen für $u = \ln(x)$ lauten

$$u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - a^2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{a^2} = 1 \pm |a|$$

Da sowohl $1 + |a|$ als auch $1 - |a|$ eine Lösung für u ist, können wir den Ausdruck sogar noch weiter vereinfachen:

$$u_{1,2} = 1 \pm a$$

Die gesuchten Lösungen sind demnach die Lösungen der Gleichung $\ln(x) = 1 \pm a$, d.h. $x = e^{1 \pm a}$.

c) Der Flächeninhalt des Kreises ist $\pi \cdot (3\text{cm})^2 = \pi \cdot 9\text{cm}^2$. Der Kreissektor ist damit $\frac{1}{\pi}$ -tel des Vollkreises.

Da der Vollkreis einem Kreissektor mit Winkel 2π entspricht, ist der gesuchte Winkel des Kreissektors im Bogenmass $2\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 2$.

Die Länge des Kreisbogens ist nichts anderes als das Produkt dieses Winkels (im Bogenmass) mit dem Radius des Kreises, d.h. $2 \cdot 3\text{cm} = 6\text{cm}$.

□

Aufgabe 12.

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach x, y, z auf.

$$\begin{aligned} 2x + 6y - 2z &= 13 \\ 4x + 10y + 4z &= 9 \\ 5x + 12y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

b) Für welchen Wert des Parameters b ist das folgende Gleichungssystem lösbar.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= b \end{aligned}$$

Ergebnis

a)

$$x = 3 \quad y = \frac{1}{2} \quad z = -2$$

b) $b = -1$

Lösungsweg:

a) Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gaußalgorithmus. Dazu wählen wir im ersten Schritt die erste Gleichung als Pivotvariable und z als Pivotvariable. Im zweiten Schritt bietet es sich

an, die 3. Gleichung als Pivotgleichung zu nehmen und x als Pivotvariable.

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 6y - 2z & = & 13 & & \\ 4x + 10y + 4z & = & 9 & | + 2 \cdot \#1 & \\ 5x + 12y + 3z & = & 15 & | + \frac{3}{2} \cdot \#1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 6y - 2z & = & 13 & & \\ 8x + 22y & = & 35 & | - \#3 & \\ 8x + 21y & = & \frac{39+30}{2} = \frac{69}{2} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 6y - 2z & = & 13 & & \\ & = & \frac{1}{2} & & \\ 8x + 21y & = & \frac{39+30}{2} = \frac{69}{2} & & \end{array}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{8} \left(\frac{69}{2} - 21 \cdot \frac{1}{2} \right) = 3 \\ z &= -\frac{1}{2} \left(13 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} \right) = -2 \end{aligned}$$

- b) Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gaußalgorithmus. Dazu wählen wir im ersten Schritt die erste Gleichung als Pivotzeile und z als Pivotvariable. Im zweiten Schritt bietet es sich an, die 2. Gleichung als Pivotgleichung zu nehmen und x als Pivotvariable.

$$\begin{array}{rclcl} x + y + z & = & 0 & & \\ x - y - 2z & = & 1 & | + 2 \cdot \#1 & \\ x + 3y + 4z & = & b & | - 4 \cdot \#1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x + y + z & = & 0 & & \\ 3x + y & = & 1 & & \\ -3x - y & = & b & | + \#2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x + y + z & = & 0 & & \\ 3x + y & = & 1 & & \\ 0 & = & b + 1 & & \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nur lösbar, wenn $b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ ist.

□

Impressum

Datum

7. Januar 2021

Verfasst von

Augenstein Oliver

OST – Ostschweizer Fachhochschule
Fachabteilung Interdisziplinäre Querschnittsthemen/Fachgruppe Mathematik und Naturwissenschaften

Oberseestrasse 10, Postfach
8640 Rapperswil, Switzerland

T +41 58 257 43 68
oliver.augenstein@ost.ch
ost.ch