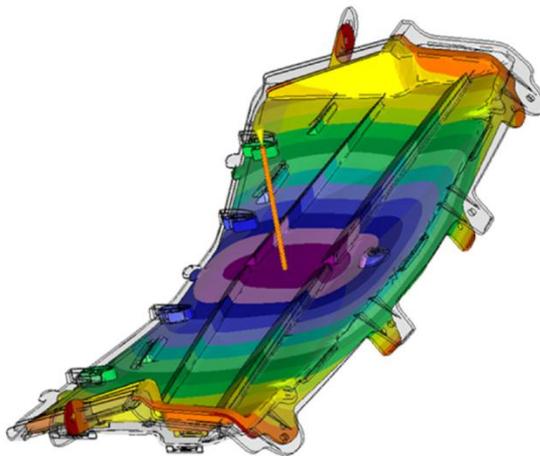


Vortrag

Einfluss der Viskoelastizität auf die Bauteileigenschaften

Theorie und Praxis



Fachseminar

Einfluss der Viskoelastizität auf die Bauteileigenschaften
Theorie und Praxis

iwk INSTITUT FÜR WERKSTOFFTECHNIK UND KUNSTSTOFFVERARBEITUNG

Mario Studer
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
Rapperswil, 09. Februar 2012

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPEWSWIL
FHO Fachhochschule Ostschweiz



Inhalt Seite 2

- **Einführung**
 - Polymerstruktur, Bindungen, Folgerungen und Auswirkungen auf das mechanische Verhalten
- **Linear-viskoelastisches Deformationsverhalten**
 - Das Superpositionsprinzip nach Boltzmann
 - Das Korrespondenzprinzip
 - Materialfunktionen und ihre Beschreibungen
 - Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip (ZTV)
 - Anwendung der ZTV zur Berechnung der Wärmespannungen
- **Fazit und Ausblick**
- **Fragen**

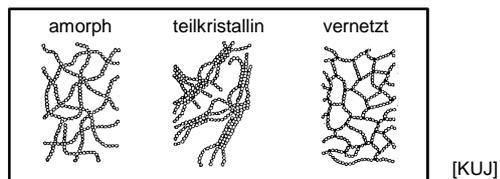
HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPEWSWIL
FHO Fachhochschule Ostschweiz

Mario Studer, 9. Feb. 2012

iwk INSTITUT FÜR WERKSTOFFTECHNIK UND KUNSTSTOFFVERARBEITUNG

■ Polymerstruktur

- Polymere sind makromolekulare Stoffe der organischen Chemie und werden durch ihre Struktur und die Molekulargewichtsverteilung charakterisiert.
- Die Makromoleküle sind Polymerketten mit 10^4 bis 10^6 Atomen in meist komplexer räumlicher Anordnung:



- Herstellungsbedingt unterliegen die Polymerwerkstoffe einer Molekulargewichtsverteilung, wodurch keine einheitlichen Kettenlängen vorliegen.

■ Bindungen

- Die Zusammenhaltekräfte im Polymerwerkstoff ergeben sich aus der Gesamtwirkung der Valenzbindungen:
 - Hauptvalenzbindungen: intramolekulare Kräfte
 - Nebervalenzbindungen: intermolekulare Kräfte (Zusammenhalt der Molekülketten)
- Die intermolekularen Kräfte sind gegenüber den intramolekularen deutlich geringer, weisen aber eine starke Abhängigkeit vom Molekülabstand auf:

Bindung	Bindungsenergie		
	Vergleichswert	Einfluss des Abstandes	
Hauptvalenzen	1		
Nebervalenzen	Dispersionskräfte	10^{-3}	r^{-6}
	Dipol-Dipol-Kräfte	10^{-2}	r^{-3}
	Induktionskräfte	10^{-2}	r^{-3}
	Wasserstoffbrücken	10^{-2}	r^{-3}
	Ionenbindungen	10^{-1}	r^{-1}

[KUJ]

■ Folgerung und Auswirkung auf das mechanische Verhalten

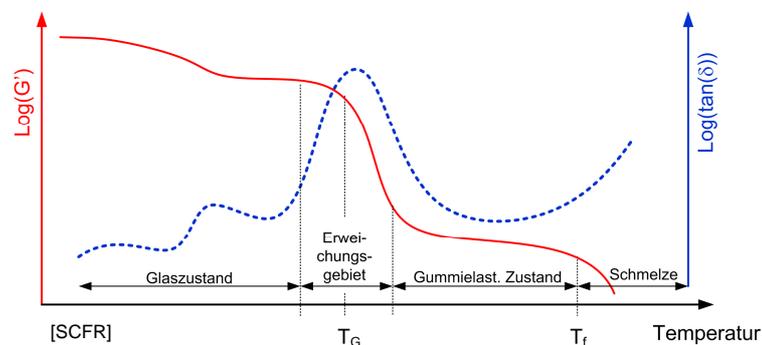
- Die für den Zusammenhalt verantwortlichen Nebervalenzbindungen bestimmen weitgehend die Eigenschaften der im Fokus liegenden thermoplastischen Polymerwerkstoffe.
- Die variierenden Kettenlängen und die unterschiedlichen Stärke dieser Kräfte führen zu einer entsprechenden Bandbreite in den mech. Eigenschaften.
- Deren vergleichsweise geringe Stärke und der ausgeprägte Einfluss des Molekülabstandes bewirken eine hohe Temperatursensitivität und ermöglichen Relaxationsvorgänge:
 - Abbau der inneren Energie durch zeitlich verzögerte Umlagerungen der Ketten



Bsp.: Crankshaft-Relaxation in amorphen Bereichen [RHB]

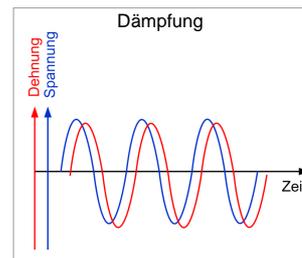
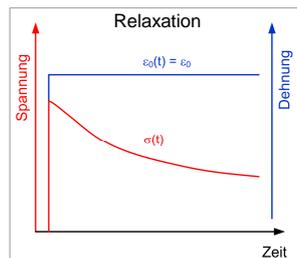
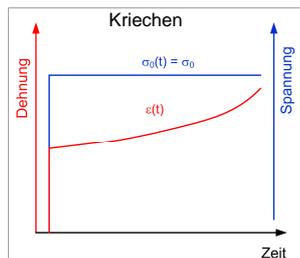
■ Folgerung und Auswirkung auf das mechanische Verhalten

- Temperatursensitivität am Beispiel des Schub-Speichermoduls und des mechanischen Verlustfaktors für einen amorphen Thermoplasten:



■ Definition der Viskoelastizität

- Unter Viskoelastizität versteht man eine zeitabhängige Elastizität, welche aufgrund zeitlich verzögerter Umlagerungsvorgänge der Moleküle auftritt.
- Folglich variieren die mechanischen Eigenschaften mit der Zeit und es treten folgende Phänomene auf:



■ Einleitung

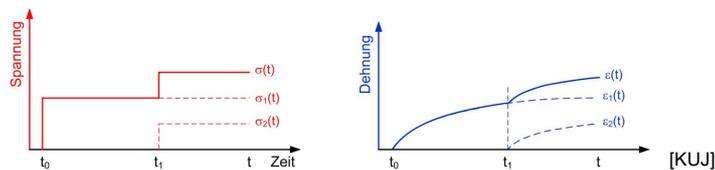
- Beschreibung des Deformationsverhaltens aller Polymere und der einschränkenden Voraussetzung kleiner Deformationen und niedriger Spannungen.
 - Linearitätsgrenzen nach Menges, siehe Referat von Prof. J. Kunz
- Die Theorie liefert einen Zusammenhang zwischen dem dreidimensionalen Spannungszustand und einem dreidimensionalen Verformungszustand.
- Drei Prinzipien stellen die Basis dar, um das linear-viskoelastische Verhalten zu Beschreiben:
 - Das *Superpositionsprinzip* nach Boltzmann und daraus abgeleitet das *Korrespondenzprinzip*
 - Das *Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip*

■ Das Superpositionsprinzip nach Boltzmann [BZM]

■ Es sei $\sigma_1(t)$ eine beliebige von der Zeit abhängige Spannung, die an der Probe die zeitabhängige Deformation $\varepsilon_1(t)$ hervorruft und $\sigma_2(t)$ eine an der gleichen Probe wirkende Spannung, die an der gleichen Probe die Deformation $\varepsilon_2(t)$ erzeugt, so gilt nach dem Superpositionsprinzip:

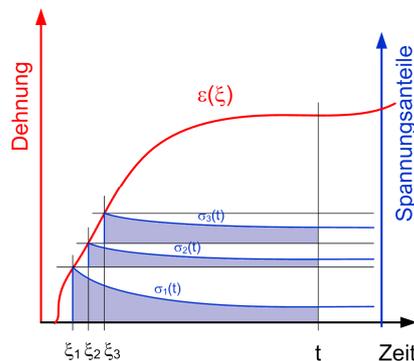
- Wenn: $\sigma_1(t) \rightarrow \varepsilon_1(t)$ und $\sigma_2(t) \rightarrow \varepsilon_2(t)$ dann: $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) \rightarrow \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$
- Wenn: $\varepsilon_1(t) \rightarrow \sigma_1(t)$ und $\varepsilon_2(t) \rightarrow \sigma_2(t)$ dann: $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \rightarrow \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$

■ Grafische Interpretation:



■ Das Superpositionsprinzip nach Boltzmann

■ Mathematische Formulierung im eindimensionalen Fall (Relaxation) :



Spannungsanteile:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \dot{\epsilon}(\xi_1) \Delta \xi_1 E_R(t - \xi_1) \\ \sigma_2(t) &= \dot{\epsilon}(\xi_2) \Delta \xi_2 E_R(t - \xi_2) \\ \sigma_3(t) &= \dot{\epsilon}(\xi_3) \Delta \xi_3 E_R(t - \xi_3) \\ \sigma_i(t) &= \frac{d\epsilon(\xi_i)}{d\xi} \Delta \xi_i E_R(t - \xi_i) \end{aligned}$$

Summation:

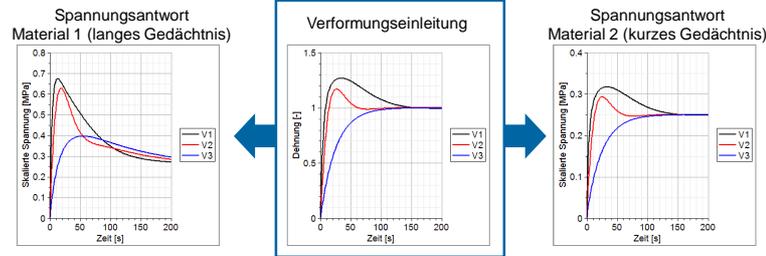
$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) = \sum_{i=1}^n E_R(t - \xi_i) \frac{d\epsilon(\xi_i)}{d\xi} \Delta \xi$$

Der infinitesimale Übergang ergibt das «Gedächtnisintegral»:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 E_R(t) + \int_0^t E_R(t - \xi) \frac{d\epsilon(\xi)}{d\xi} d\xi$$

■ Das Superpositionsprinzip nach Boltzmann

- Beispiel: Einfluss der Verformungseinleitung auf den zeitlichen Spannungsverlauf



- Analoges Vorgehen ergibt das «Gedächtnisintegral» für die Berechnung der zeitlichen Verformung bei beliebiger Spannungsgeschichte:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - \xi) \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} d\xi$$

■ Das Superpositionsprinzip nach Boltzmann

- Verallgemeinerung: Konstitutive Gleichung bei Isotropie und Isothermie: (Für FEM-Simulation)

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \underbrace{K_R(t - \xi)}_{\text{Kompressions-Relaxationsmodul}} \frac{d\epsilon_{kk}}{d\xi} d\xi + 2 \int_0^t \underbrace{G_R(t - \xi)}_{\text{Schub-Relaxationsmodul}} \frac{d}{d\xi} \left[\epsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij} \epsilon_{kk}}{3} \right] d\xi$$

- Analogie zur Elastizitätstheorie:
 - Es werden zwei unabhängige Stoffwerte benötigt
 - Diese Stoffwerte sind bei viskoelastischen Stoffen keine Konstanten, sondern im Allgemeinen Funktionen der Zeit und wie später noch folgt, Funktionen der Beanspruchung (Temperatur und Spannung/Verformung)

■ Das Korrespondenzprinzip

- Transformierte Stoffgleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie:

$$\sigma(t) = E_R(t) \epsilon_0 + \int_0^t E_R(t-\xi) \frac{d\epsilon}{d\xi} d\xi$$

- Laplace-Transformation: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$

$$\sigma(t) \circ \bullet \bar{\sigma}(s) = \bar{E}_R(s) \epsilon_0 + \bar{E}_R(s) \bar{\epsilon}_{,t}(s) \quad \text{mit} \quad \bar{\epsilon}_{,t}(s) = s\bar{\epsilon}(s) - \bar{\epsilon}_0$$

$$\text{folgt: } \Rightarrow \boxed{\bar{\sigma}(s) = s\bar{E}_R(s)\bar{\epsilon}(s)} \quad \text{analog: } \boxed{\bar{\epsilon}(s) = s\bar{J}_E(s)\bar{\sigma}(s)}$$

Das Laplace-transformierte Stoffgesetz der linearen Viskoelastizitätstheorie reduziert sich auf jenes der linearen Elastizität mit den Ersatzmoduln:

- Für Zugbeanspruchung: $s\bar{E}_R(s)$
- Für Schubbeanspruchung: $s\bar{G}_R(s)$

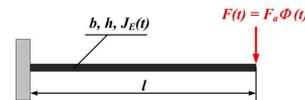
■ Das Korrespondenzprinzip

- Aussage:

- Jedem linear viskoelastischen Problem entspricht ein lineares Laplace-transformiertes Problem mit den Ersatzmoduln $s\bar{E}_R(s)$ für Relaxieren und $s\bar{J}_E(s)$ für Kriechen

- Anwendung:

- Bsp.: Kriechen eines einseitig eingespannten Balkens



Gesucht: zeitliche Durchbiegung an der Stelle l

Lösung:

- a) Laplace-Transformation: $y(l) = \frac{F_a l^3}{3I} J_E \circ \bullet \bar{Y}(s) = \frac{l^3}{3I} \bar{F}_a(s) s \bar{J}_E(s) \quad \text{mit: } \bar{F}_a(s) = \frac{F_a}{s}$

- b) Rück-Transformation: $y(l, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{Y}(s)\} = \frac{F_a l^3}{3I} J_E(t)$

■ Das Korrespondenzprinzip

■ Relationen zwischen den Materialfunktionen:

■ Einfache Zusammenhänge bei linear-elastischem Materialverhalten:

Elastizitätskonstanten	(G,E)	(G,K)	(E,K)	(G,μ)	(E,μ)	(K,μ)
Elastizitätsmodul E	-	$\frac{9GK}{3K+G}$	-	$2G(1+\mu)$	-	$3K(1-2\mu)$
Schubmodul G	-	-	$\frac{3EK}{9K-E}$	-	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{3K(1-2\mu)}{2(1+\mu)}$
Kompressionsmodul K	$\frac{EG}{9G-3E}$	-	-	$G\frac{2(1+\mu)}{3(1-2\mu)}$	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$	-
Poissonzahl μ	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{E}{3K} \right]$	-	-	-

■ Komplexe Zusammenhänge bei linear-viskoelastischem Materialverhalten:

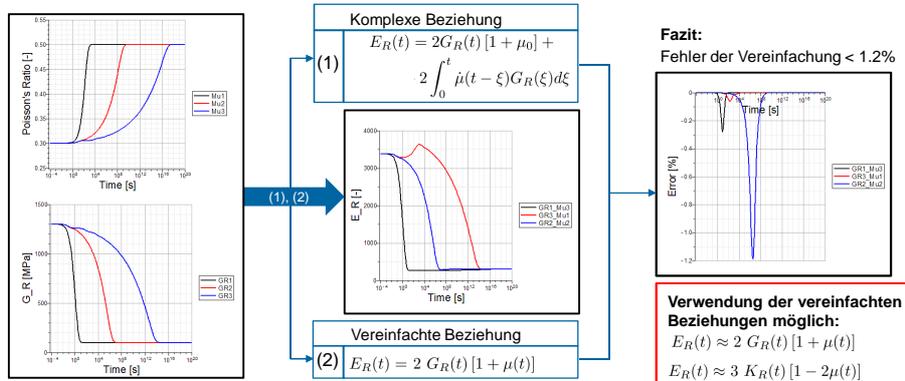
■ Bsp.: $E = 2G(1 + \mu) \xrightarrow[\text{Korrespondenz}]{s\bar{E}_R(s), s\bar{\mu}(s)} s\bar{E}_R(s) = 2s\bar{G}_R(s)(1 + s\bar{\mu}(s))$

$$E_R(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{E}_R(s) \} = 2G_R(t) [1 + \mu_0] + 2 \int_0^t \dot{\mu}(t - \xi) G_R(\xi) d\xi$$

■ Das Korrespondenzprinzip

■ Relationen zwischen den Materialfunktionen:

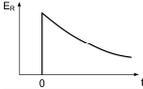
■ Vereinfachung der komplexen Zusammenhänge für den praktischen Gebrauch:



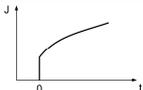
■ Materialfunktionen und ihre Beschreibungen

- In den beiden Gedächtnisintegralen kommen die beiden Materialfunktionen zum Einsatz:

- Relaxationsfunktion:

Formel	Charakteristischer Verlauf	Eigenschaften
$E_R(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}$		$E_R(t) > 0$ $\dot{E}_R(t) > 0$ $\dot{E}_R(t) < 0$ $\ddot{E}_R(t) < 0$

- Nachgiebigkeitsfunktion:

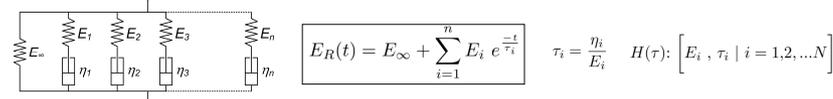
Formel	Char. Verlauf	Eigenschaften
$J(t) = \frac{1}{E_C(t)} = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}$		$J(t) > 0$ $\dot{J}(t) < 0$ $\dot{J}(t) > 0$ $\ddot{J}(t) > 0$

■ Materialfunktionen und ihre Beschreibungen

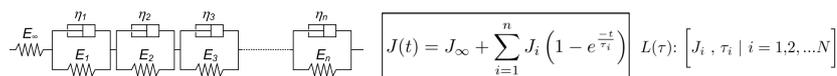
- Materialmodellierung mit Hilfe der Modellrheologie ausgehend der beiden Grundgesetze für ideale Flüssigkeit und ideale Elastizität:

Newton $\sigma = \eta_e \frac{d\epsilon}{dt} = 3 \eta_v \frac{d\epsilon}{dt}$	Hooke $\sigma = E \epsilon$		Maxwell $\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} + E \epsilon$	Kelvin $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma$
---	---------------------------------------	---	---	--

- Verallgemeinertes Maxwell-Modell für die Relaxationsfunktion:

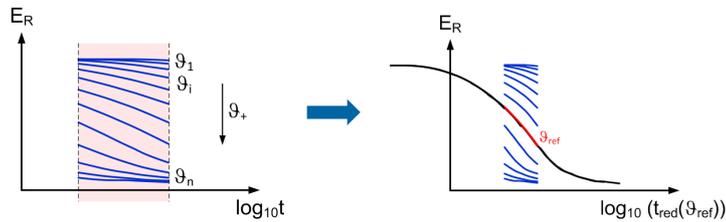


- Verallgemeinertes Kelvin-Modell für die Nachgiebigkeitsfunktion:



■ Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip

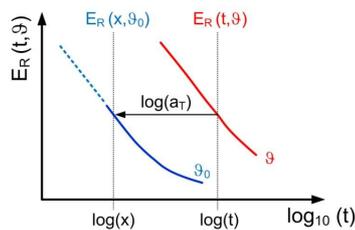
■ Feststellung



- Ähnlicher Verlauf der Relaxationskurven über der logarithmischen Zeit bei unterschiedlichen Temperaturen
- Verschiebung der Relaxationskurven parallel zur Zeitachse führt zu einem näherungsweise geschlossenen Kurvenzug, zur Masterkurve
- Das Verhalten bei hoher Temperatur und kurzer Zeit entspricht dem Verhalten bei niedriger Temperatur und langer Zeit → **Reduktion des zeitlichen Versuchsaufwandes**

■ Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip

■ Mathematische Fassung



■ Konsequenz der Parallelverschiebung:

$$E_R(t, \vartheta) = E_R(x, \vartheta_0)$$

■ mit der reduzierten Zeit x :

$$x = \frac{t}{a_T(\vartheta, \vartheta_0)}$$

■ und dem Zeit-Temperatur-Verschiebungsfaktor a_T :

$$\log a_T(\vartheta, \vartheta_0) = \log t - \log x = \log \frac{t}{x}$$

mit: $\vartheta > \vartheta_0 \Rightarrow t < x, a_T < 1$

■ Fazit:

Mit Hilfe des ZTV wird die Beschreibung des zeit- und temperaturabhängigen Kriech-/Relaxationsverhaltens wesentlich vereinfacht:

→ Anstelle von 1 Funktion mit 2 Variablen, genügen 2 Funktionen mit je 1 Variable

■ Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip

- Ansätze zur Beschreibung der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion

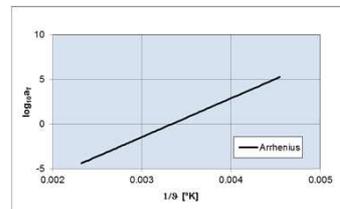
- Gleichung nach Arrhenius (1896):

$$\lambda = A e^{-\frac{E_a}{R\vartheta}}$$

λ = Reaktionsgeschwindigkeit
 A = Arrheniusfaktor
 E_a = Aktivierungsenergie
 R = Universelle Gaskonstante [JK⁻¹mol⁻¹]
 ϑ = Temperatur [K]

- Aktivierungsprozess steuert die Platzwechsel der Moleküle
- Anwendung für die Zeit-Temperatur-Verschiebung (ZTV)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\vartheta_0} = \frac{c}{x} = A e^{-\frac{E_a}{R\vartheta_0}} \\ \lambda_{\vartheta} = \frac{c}{t} = A e^{-\frac{E_a}{R\vartheta}} \end{aligned} \right\} \frac{t}{x} = a_T(\vartheta, \vartheta_0) = e^{-k\left(\frac{1}{\vartheta_0} - \frac{1}{\vartheta}\right)}$$



■ Das Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip

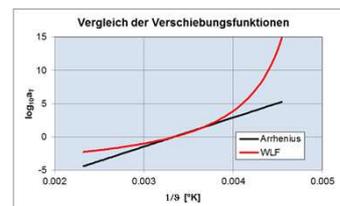
- Ansätze zur Beschreibung der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion

- Gleichung nach WLF (Williams, Landel und Ferry 1955):

$$\log a_T(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{-c_1(\vartheta - \vartheta_0)}{c_2 + (\vartheta - \vartheta_0)} \quad c_1 = f(\vartheta_0), c_2 = f(\vartheta_0)$$

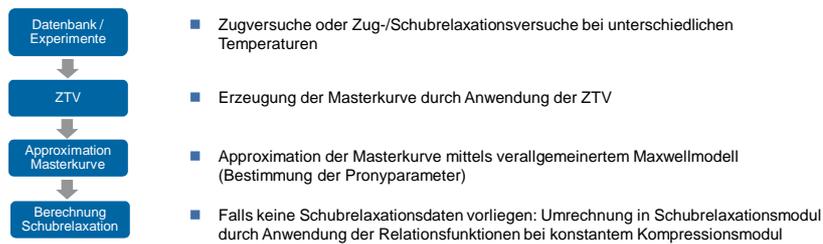
- c_1 und c_2 sind materialspezifische Konstanten, welche von der Wahl der Bezugstemperatur ϑ_0 abhängen.
- Wählt man als Bezugstemperatur $\vartheta_0 = T_G + 50 \text{ K}$, so wird die Verschiebungsfunktion für viele amorphe Polymere identisch mit $c_1 = 8.86$ und $c_2 = 101.6 \text{ K}$
- Gültigkeit: $T_G < T < T_G + 100 \text{ K}$

➔ Bestimmung der WLF-Konstanten über Experimente



■ Anwendung der ZTV zur Berechnung der Wärmespannung bei unverstärkten Kunststoffen mittels FEM

- Annahmen und Vereinfachungen für unverstärkte Kunststoffe, bei niedriger mechanischer Beanspruchung!
 - Isotropie; thermo-rheologisch einfaches Verhalten → ZTV; konstanter Kompressionsmodul
- Ablauf für die Generierung des mechanischen Materialmodells:



- Die mechanischen und physikalischen Eigenschaften der Polymere werden massgeblich durch die vergleichsweise schwachen Nebervalenzkräfte bestimmt
- Die Beschreibung des linear-viskoelastischen Materialverhaltens ist vergleichsweise komplex
- Es existieren aber einige wichtige Prinzipien, welche die Beschreibung massgeblich vereinfachen:
 - Superpositionsprinzip
 - Korrespondenzprinzip
 - Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip
- Die Anwendung dieser Prinzipien sowie das Treffen weiterer Vereinfachungen für die Praxis setzt fundierte Kenntnisse voraus!



■ Literatur

- [KUJ] Kunz, J.: Vorlesungsskript Kunststofftechnik, HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Studienjahr (2004/2005)
- [RHB] Rösler, J.; Harders, H.; Bäker, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe, Kapitel 8: Mechanisches Verhalten der Polymere, Teubner Verlag (2006)
- [SCFR] Schwarzl, F. R.: Polymermechanik, Struktur und mechanisches Verhalten der Polymere, Springer Verlag Berlin Heidelberg (1990)
- [BZL] Boltzmann, L.: Sitzungsbericht, Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien, 2. Abt. 70:275 (1874)

