

Werkstoffmechanik – Schaumstoffe

Strukturschaumstoff unter Querbelastung

Struktur- oder Integralschaumstoffe haben ein hervorragendes Eigenschaftsprofil: Geringe Dichte, hohe Biegesteifigkeit, und ein ausgezeichnetes Dämmungsvermögen gegen Wärme und Schall. Damit eignen sie sich sehr gut für anspruchsvolle Leichtbauanwendungen. In diesen können sie auch Querbelastungen ausgesetzt sein. Mit der Theorie der elastischen Bettung und einem geeigneten Steifigkeitsmodell gelingt die mathematische Beschreibung dieser Beanspruchung.

Johannes Kunz¹

Die theoretisch-analytische Behandlung des Problems vermag die massgebenden physikalischen Zusammenhänge aufzuzeigen, auch wenn oder gerade weil sie mit Idealisierungen und Vereinfachungen verbunden ist. Damit kann sie z.B. die Interpretation der Resultate numerischer Berechnungen unterstützen.

Querbelastung flächiger Schaumstoffstrukturen

Charakteristisch für Strukturschaumstoffe sind ihr geschäumter und damit poröser Kern *K* und die relativ dünnen, kompakten, porenfreien Randschichten *R*. Für die theoretische Betrachtung wird ein symmetrischer Aufbau angenommen (Abb. 1). Für funktionell bedingte Querbelastungen wie z.B. Krafteinleitungen werden an solchen Stellen in der Regel geeignete Inserts oder andere Verstärkungselemente eingesetzt, welche die querbelastende Kraft möglichst grossflächig in die Schaumstoffstruktur übertragen. Demgegenüber treten unerwünschte Querbelastungen, z.B. durch Schläge oder aufprallende Massen, an beliebiger Stelle auf und müssen ohne jede Verstärkungsmassnahme absorbiert werden können.

Die Schaumstoffstruktur reagiert auf eine Querbelastung durch eine Biegeverformung des Bauteils als Ganzes (total) sowie eine überlagerte lokale Verformung der Randschicht (Abb. 2). Die Randschicht

¹ Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, Institutspartner, IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung Rapperswil an der OST Ostschweizer Fachhochschule

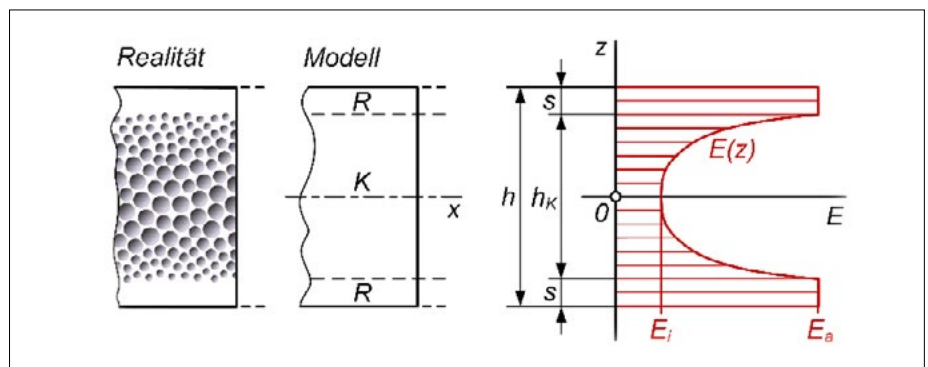


Abb. 1: Schaumstoffstruktur: Realität, Modell und E-Modul-Verlauf über den Querschnitt, (Bild: IWK)

auf der Belastungsseite kann je nach Bauteilgeometrie als Balken oder als Kreisplatte betrachtet werden, die auf der nachgiebigen Kernschicht elastisch gebettet sind. Die entsprechenden Theorien für Balken [1, 2] und Kreisplatten [3, 4] setzen kleine Verformungen sowie isotropes, linear-elastisches Werkstoffverhalten voraus und beinhalten insbesondere die Aufstellung und die Lösung der problemspezifischen Differentialgleichungen. Sie basieren auf der Vorstellung, dass die flächig verteilten Auflagerkräfte *p* der querbelasteten Randschicht in jedem Punkt der Auflagefläche proportional sind zur dortigen Kernschicht-

Verformung *w*, die gleichzeitig der Durchbiegung der Randschicht (Abb. 3) entspricht. Es ist also

$$p(x) = k \cdot w(x) \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor *k* in (1), meist als Bettungsziffer bezeichnet, hat die Dimension einer Kraft pro (Länge)³. Die Bettungsziffer berechnet sich als Quotient von Druckspannung $\sigma_d = -p$ auf die Kernschicht der Dicke *h_K* und der zugehörigen Kernschichtverformung $\Delta h < 0$ gemäss

$$k = \frac{p(x)}{w(x)} = \frac{\sigma_d}{\Delta h} = \frac{E_{K,z} \cdot \epsilon_z}{h_K \cdot \epsilon_z} = \frac{E_{K,z}}{h_K} = \frac{p_0}{w_0} \tag{2}$$

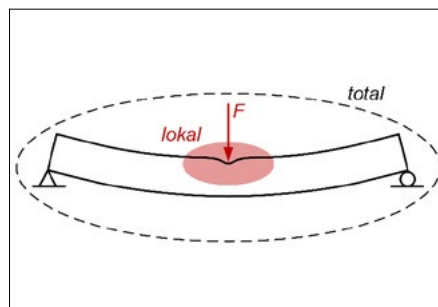


Abb. 2: Totale und lokale Verformung eines Strukturschaumstoffträgers unter Querbelastung. (Bild IWK)

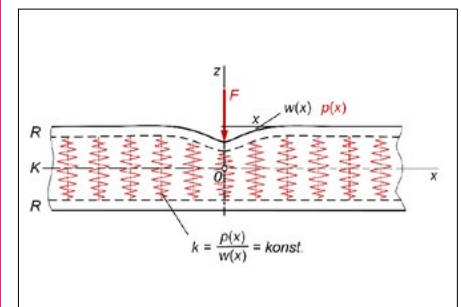


Abb. 3: Randschicht R der Schaumstoffstruktur unter Querbelastung auf elastisch nachgiebigem Kern K. (Bild: IWK)

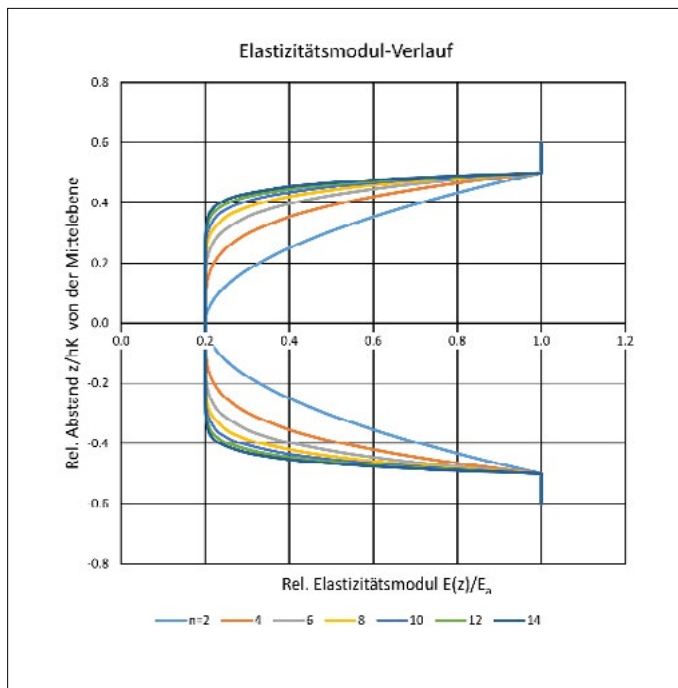


Abb. 4: Verlauf des Verhältnisses $E(z)/E_a$ über den Querschnitt in Funktion des Exponenten n gemäss Ansatz (3); mit $E_i/E_a = 0,2$ und $h/(h_K = 1,2)$. (Bild: IWK)

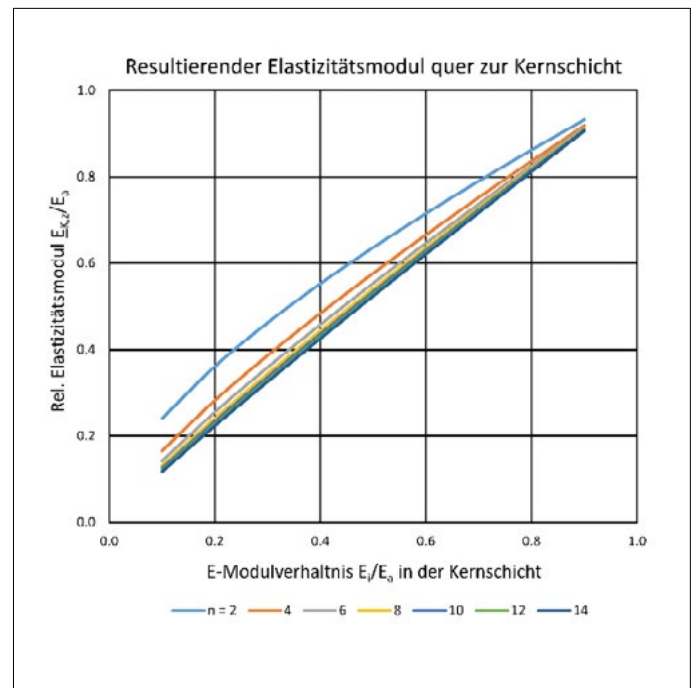


Abb. 5: Resultierender Elastizitätsmodul quer zur Kernschicht, numerisch bestimmt; Parameterbereiche $0,1 \leq E_i/E_a \leq 1,0$ und $2 \leq n \leq 14$. (Bild: IWK)

Darin bezeichnet der Index die Werte bei $x = 0$, und $E_{K,z}$ ist der für die Querbelastung massgebende, über die Kernschichtdicke h_K resultierende Elastizitätsmodul. Die Bestimmung dieser Grösse erfordert die Kenntnis der Verteilung des Elastizitätsmoduls $E(z)$ über die Kernschichtdicke.

Steifigkeitsmodell für Strukturschaumstoffe

Die Berechnung des Elastizitätsmodulverlaufs in der Kernschicht basiert auf der Tatsache, dass in den Querschnitten von Strukturschaumstoffen die Poren bzw. Zellen nach Grösse und Dichte ungleichmässig verteilt sind, und dass die Steifigkeit mit dieser Verteilung korreliert. Ein zweckmässiges Modell geht von isotropem Werkstoffverhalten, hinreichend kleinen elastischen Verformungen und dem symmetrischen Verlauf der Steifigkeit über den Querschnitt aus [5]. Da Schaumstoffe eine sehr geringe Querkontraktion aufweisen [6], kann für die Poissonzahl vereinfachend $\mu \approx 0$ gesetzt werden. In der Randschicht R wird der Elastizitätsmodul mit dem Wert E_a als konstant betrachtet, in der Mitte der Kernschicht K hat er sein Minimum E_i . (Abb. 1). Im Kern wird $E_K(z)$ durch ein Po-

tenzgesetz mit dem Exponenten $n > 1$ beschrieben. Mit der Kernschichtdicke h_K gilt dann

$$E_K(z) = E_i + (E_a - E_i) \cdot \left(2 \cdot \frac{|z|}{h_K}\right)^n = E_i \cdot \left[1 + \left(\frac{E_a}{E_i} - 1\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{|z|}{h_K}\right)^n\right] \quad (3)$$

$(0 \leq |z| \leq \frac{h_K}{2})$

Die Verwendung des Betrags $|z|$ in (3) sorgt für Symmetrie bezüglich $z = 0$ und für positive Werte auch bei beliebigen, insbesondere ungeraden Exponenten $n > 1$. Diese können praktisch in der Grössenordnung von $n = 2,0 \dots 15$ oder höher liegen (Abb. 4). Mit $n = 0$ würde (3) den Wert E_a eines kompakten, ungeschäumten Querschnitts ergeben. Dass bei Kunststoffen die Steifigkeitsparameter E_a und E_i von Belastungszeit, Temperatur usw. abhängen, kann im Modell berücksichtigt werden. Leider sind in der Literatur kaum brauchbare Daten für die Grössen E_a , E_i und n zu finden, sie lassen sich aber mit wenigen Vorgehensschritten experimentell ermitteln [5].

Anhand dieses Steifigkeitsmodells ergibt sich für den resultierenden Elastizitätsmodul $E_{K,z}$ entsprechend der in z -Richtung seriell angeordneten elastischen Volumenelemente der Ausdruck

$$\frac{1}{E_{K,z}} = \frac{1}{h_K} \cdot \int_{-\frac{h_K}{2}}^{\frac{h_K}{2}} \frac{dz}{E_K(z)} = \frac{1}{h_K \cdot E_a} \cdot \int_{-\frac{h_K}{2}}^{\frac{h_K}{2}} \frac{dz}{\frac{E_i}{E_a} + \left(1 - \frac{E_i}{E_a}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{|z|}{h_K}\right)^n} \quad (4)$$

Mit (4) ist die Bettungsziffer (3) durch die Parameter E_a , E_i , n und h_K des Schaumstoffs grundsätzlich bestimmt. Da aber das Integral in (4) nicht elementar lösbar ist, bietet sich eine numerische Auswertung an (Abb. 5). Aus dieser kann gegebenenfalls eine empirisch Näherungsformel entwickelt werden. Beispiel für eine solche ist die Beziehung

$$\frac{E_{K,z}}{E_a} \approx \frac{E_i}{E_a} + \frac{0,3}{n} \cdot \cos\left(\frac{E_i}{E_a} \cdot \frac{\pi}{2} - 0,35\right) \quad (5)$$

Diese Näherung hat in den Parameterbereichen $0,1 \leq E_i/E_a \leq 1,0$ und $2 \leq n \leq 14$ eine Genauigkeit von $\pm 5\%$ gegenüber den numerisch bestimmten Werten.

In der Kernschicht herrscht wegen $\mu \approx 0$ ein von z unabhängiger, praktisch einachsiger Druck mit $\sigma_z(x) = -p(x)$ senkrecht zur Randschicht mit dem Höchstwert bei $x = 0$. Die daraus resultierende Verformung ist eine negative Dehnung (Stauchung). Ihr Verhältnis zum Minimalwert am Kernrand

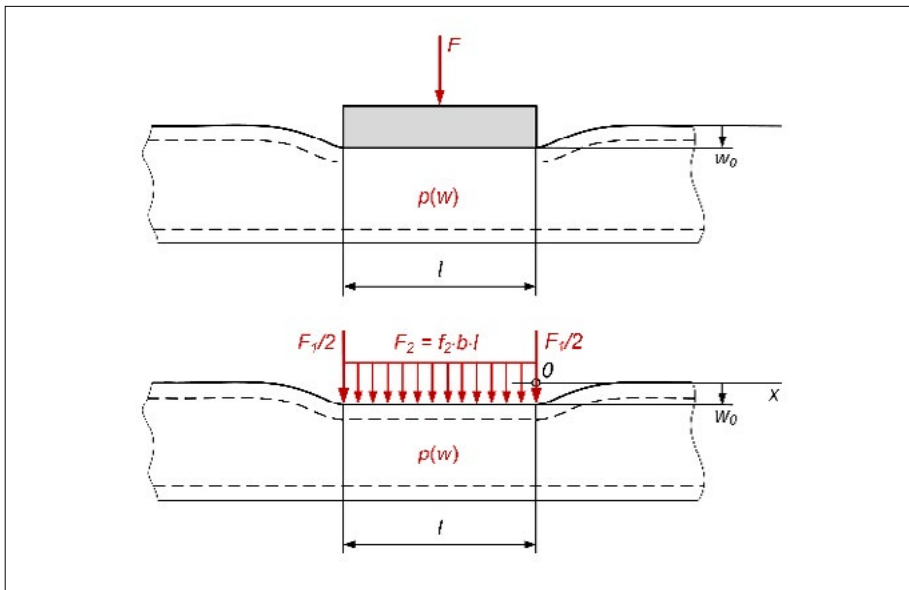


Abb. 6: Schaumstoffstruktur unter quer wirkender Flächenlast. (Bild: IWK)

$$\frac{\varepsilon_z(z)}{\varepsilon_z\left(z = \frac{h_K}{2}\right)} = \frac{E_a}{E_K(z)} \quad (6)$$

verläuft also umgekehrt proportional zum Elastizitätsmodul (3) in der Kernschicht.

Querbelasteter Struktur-schaumstoff-Balken

Die theoretische Behandlung eines Balkens oder Plattenstreifens unter Querbelastung führt im Wesentlichen auf ein zweidimensionales Problem. Durch Gleichsetzen der lokalen Querkraft $Q(x)$ in der querbelasteten Randschicht mit dem bis zu dieser Stelle aufintegrierten Druck $p(x)$ gewinnt man eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die Einsenkung $w(x)$ der Randschicht bzw. die Stauchung der Kernschicht [1, 2]. Wird für einen sehr langen Balken der konstanten Breite b die Randbedingung gesetzt, dass für $x \rightarrow \infty$ diese Einsenkung verschwinden muss, erhält man die Lösung

$$w(x) = \frac{F}{2} \cdot \frac{\beta}{b \cdot k} \cdot \exp(-\beta x) \cdot (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{p(x)}{k} \quad (7)$$

$(0 \leq x < \infty)$

Sie wird für negative x -Werte wegen der Symmetrie am Nullpunkt gespiegelt. Dort hat die Einsenkung ihr Maximum mit

$$w_0 = w_{max} = w(x = 0) = \frac{F}{2} \cdot \frac{\beta}{b \cdot k} = \frac{p_0}{k} \quad (8)$$

Die Abkürzung

$$\beta = \left(\frac{3}{s^3 \cdot h_K} \cdot \frac{\bar{E}_K}{E_a} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9)$$

in (7) und (8) ist, mit s als Dicke der Randschicht, eine Konstante der Dimension (Länge)⁻¹. Sie bestimmt das Abklingen der Lösungsfunktion (7). Mit $\beta = 0,4$ z.B. ist die Einsenkung bei $x = 10$ bereits auf rund 2 % ihres Höchstwertes abgeklungen. Dieses rasche Abklingen bestätigt die oben getroffene Annahme von $w(x \rightarrow \infty) \approx 0$. Mit der Beziehung (7) können anhand der Biegetheorie das Biegemoment, die Querkraft, die Normalspannung und die Dehnung in der Randschicht bestimmt werden [7].

Wirkt anstelle einer Einzellast F (Abb. 3) eine Flächenlast f (Abb. 6), ausgeübt z.B. durch einen Körper hoher Steifigkeit, so teilt sich die Gesamtbelastung F auf in eine Rückstellkraft F_1 infolge Durchbiegung der Randschicht ausserhalb der Flächenlast und eine Kraft F_2 infolge Zusammendrückung des Kerns unter der Flächenlast [7]. Je dicker die Randschicht, umso höher ist ihre Biegesteifigkeit, und umso grösser ist ihr Anteil an der Reaktion, was gleichbedeutend ist mit einer kleineren Durchbiegung w und kleinerem Druck $p(w)$. Wegen $F_1 + F_2 = F$ und gemeinsamer Verformung w_0 gelten die Gesetzmässigkeiten parallel geschalteter Federn. Daraus ergibt sich mit (8)

$$w_{1,0} = \frac{F_1}{2} \cdot \frac{\beta}{b \cdot k} = w_{2,0} = F_2 \cdot \frac{1}{b \cdot l \cdot k} = \frac{p_0}{k} \quad (10)$$

mit den Kräften

$$F_1 = F \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta \cdot l}{2}} \quad \text{und} \quad F_2 = F \cdot \frac{\frac{\beta \cdot l}{2}}{1 + \frac{\beta \cdot l}{2}} \quad (11)$$

Querbelastete Strukturschaumstoff-Kreisplatte

Bei einer hinreichend grossen Platte aus Strukturschaumstoff wirkt sich eine Querbelastung nahezu rotationssymmetrisch aus. Das Problem lässt sich daher gut durch die Theorie der zentrisch belasteten, elastisch gebetteten Kreisplatte erfassen [3, 4]. Als Koordinate dient der auf den Längenparameter $L = (D/k)^{1/4}$ bezogene, dimensionslose Radius in der Form

$$\xi = \frac{r}{L} = r \cdot \left(\frac{k}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

mit k als Bettungsziffer (2) und der Randschicht-Plattensteifigkeit

$$D = \frac{E_a \cdot s^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (13)$$

Analoges Vorgehen wie beim Balken führt auf eine Besselsche Differentialgleichung, deren Lösung durch Bessel- oder Zylinderfunktionen gebildet wird. Diese sind nur als Potenzreihen oder in Integralform darstell- und numerisch bestimmbar, weshalb man sich im praktischen Gebrauch bestehender Zahlentafeln bedienen kann [3, 8]. Die Durchbiegung der Randschicht bzw. die Zusammendrückung der Kernschicht ergibt sich dann mit der Zylinderfunktion $Z_3(\xi)$ zu

$$w(\xi) = \frac{F \cdot L^2}{4 \cdot D} \cdot Z_3(\xi) = \frac{p(\xi)}{k} \quad (14)$$

Da diese Verformung mit der Zylinderfunktion stark abklingt und sich nach leichtem Überschwingen dem Wert 0 annähert (Abb. 7), ist die Annäherung der ausgedehnten Schaumstoffstruktur durch eine Kreisplatte gerechtfertigt. Im Kreiszentrum bzw. im Angriffspunkt der Kraft F , liegt mit $Z_3(\xi = 0) = 0,5$ das Maximum

$$w_0 = w_{max} = w(\xi = 0) = \frac{F \cdot L^2}{8 \cdot D} = \frac{p_0}{k} \quad (15)$$

Aus der Beziehung (14) können anhand der Plattentheorie die Biegemomente, die Querkraft, die Normalspannungen und die Dehnungen des zweiachsigen Spannungszustandes in der Randschicht berechnet werden [9]. Dabei treten ausser $Z_3(\xi)$ auch

die Zylinderfunktion $Z_4(\xi)$ und deren Ableitungen nach ξ auf. Die Erfassung einer konzentrischen Flächenlast ist ebenfalls möglich, jedoch nicht ganz so einfach wie beim Balken [10].

Energiebetrachtungen

Querbeanspruchungen können auftreten, wenn z.B. ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v auf die Schaumstoffstruktur aufprallt und von dieser durch eine entsprechende Verformung abgefedert werden muss. Bei linear-elastischem Verhalten wird dann die kinetische Energie E_{kin} in der Schaumstoffstruktur in Formänderungsenergie U umgesetzt, und es gilt der Energieerhaltungssatz

$$U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot w_{tot} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot (w_b + w_0) =$$

$$U_b + U_0 = E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2} \quad (16)$$

Die Formänderungsenergie U setzt sich aus U_b für die Durchbiegung w_b der Schaumstoffstruktur als Ganzes (Abb. 1) und U_0 für die lokale Verformung w_0 unter der Querbelastung F zusammen. U_0 wiederum besteht aus einem Anteil U_{or} der Randschicht unter lokaler Biegung und einem Anteil U_{ok} der Kernschicht unter Druck. Diese Energieanteile können anhand der Biegetheorie und der elastischen Bettung analytisch berechnet werden [7, 10]. Sie bilden, auf die Volumeneinheit bezogen, die Basis für die Bauteilauslegung unter dieser stossartigen Belastung.

Abschliessende Gedanken

Die vorliegenden Ausführungen beschränken sich aus Platzgründen auf eine summarische Darstellung der ausführlichen Problemlösung [7, 10]. Sie sollen aufzeigen, dass sich das Steifigkeitsmodell nach [5] auch für die analytische Beschreibung des Verhaltens von Strukturschaumstoffen unter Querbelastung eignet. Diese basiert

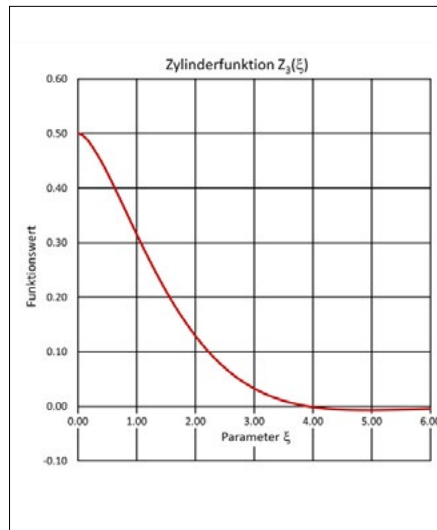


Abb. 7: Zylinderfunktion Z_3 in Funktion des Parameters ξ . (Bild: IWK; nach [3])

auf der Winklerschen Theorie der elastischen Bettung [1]. Im vorliegenden Problem bildet die querbelastete Randschicht des Strukturschaumstoffs das gebettete Element, während die poröse Kernschicht mit den Steifigkeitsbeziehungen (3) und (4) die elastische Bettung darstellt. Obwohl diese Theorie vom Ansatz her nicht in der Lage ist, Druckunterschiede über die Kernschichthöhe und damit insbesondere auch Dehnungs- und Spannungskonzentrationen zu beschreiben, zeigen die Ergebnisse mit ihrem modellhaften Charakter die grundlegenden Zusammenhänge der behandelten Problemstellung auf. Damit können sie u.a. auch für Pilotstudien von Nutzen sein oder als Ausgangsbasis für FEM-Untersuchungen, mit welcher sich dann lokale Phänomene genauer betrachten lassen. Ob es sich lohnen würde und überhaupt zielführend wäre, die vorgestellte Theorie noch um kontaktmechanische Ansätze zu erweitern, ist eine andere Frage. Wünschbar jedenfalls wäre ein Einbezug versagensmechanischer Überlegungen aufgrund von Dehnungs- oder Energiekriterien.

Literatur

- [1] Winkler, E.: Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. Verlag H. Dominicus Prag 1867
- [2] Szabó, I.: Einführung in die Technische Mechanik. 8. Aufl., Springer Verlag Berlin 1975, S. 146-148
- [3] Schleicher, F.: Kreisplatte auf elastischer Unterlage. Verlag von Julius Springer Berlin 1926
- [4] Raecke, I.: Flächentragwerke I/II: Elastische Platten. Vorlesungsmanuskript Otto von Guericke-Universität Magdeburg. <https://silotips/download>
- [5] Kunz, J.: Ein Steifigkeitsmodell für Strukturschaumstoffe. Konstruktion 75(2023)01-02, S. 60-64
- [6] Wikipedia, Poissonzahl; aufgerufen am 12.6.2023
- [7] Kunz, J.: Strukturschaumstoffe: Querbeanspruchung von Balken. Internes Dokument IWK Rapperswil-Jona 2023
- [8] Jahnke, E., Emde, F.: Tafeln höherer Funktionen. B. G. Teubner Verlag Leipzig 1966
- [9] Nadai, A.: Die elastischen Platten. Springer Verlag Berlin 1925 (Nachdruck 1968)
- [10] Kunz, J.: Strukturschaumstoffe: Querbeanspruchung von Kreisplatten. Internes Dokument IWK Rapperswil-Jona 2023

Der Verfasser dankt seinem Kollegen Prof. Dr.-Ing. Mario Studer vom IWK für den wertvollen Gedankenaustausch.

Kontakt

IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung
Prof. Johannes Kunz
CH-8645 Rapperswil-Jona
johannes.kunz@ost.ch
www.ost.ch/iwk

Rohstoffland Schweiz
InnoRecycling fördert Ressourcen