

› Berechnung von Kunststoffkonstruktionen

Dehnungsbezogene Auslegung bei Schub und Torsion

Die dehnungsbezogene Auslegung von schub- oder torsionsbeanspruchten Kunststoffteilen (Bild 1) erfordert die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen den aus Normal- und Schubspannungen resultierenden Verformungen und den Werkstoffeigenschaften. Im vorliegenden Beitrag werden anhand dieser Gesetzmässigkeiten die relevanten Beziehungen für die Konstruktionspraxis herausgearbeitet.



Bild: Sabic

Bild 1: Torsion ist die Hauptbeanspruchung von Schraubenfedern: LeeP-Kunststofffedern von Lee Springs, hergestellt aus dem PEI Ultem von Sabic Innovation Plastics.

› Prof. Johannes Kunz¹

Bei der Auslegung von Bauteilen ist sicherzustellen, dass das Bauteil seine Funktion erfüllt und möglichst wirtschaftlich hergestellt werden kann. Im Mittelpunkt steht das komplexe Zusammenspiel von Beanspruchung, Bauteilgeometrie und Werkstoff unter Berücksichtigung der Einflüsse von Umwelt und Fertigung. Der Konstrukteur bedient sich dabei verschiedener Hilfsmittel, u.a. auch solcher, die das mechanische Verhalten des Bauteils unter der Beanspruchung simulieren. Werkstoffseitig geht es insbesondere um das Erkennen möglicher Versagensmechanismen und deren Vermeidung. Stützt man sich als Kriterium hierfür auf kritische Dehnungen ab, so stellt sich die Frage, wie dies bei Beanspruchungen möglich ist, die wie Schub oder Torsion

¹ Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im MAS-Studiengang Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz.

primär Schubspannungen und entsprechende Verformungen bewirken.

Dass eine Auslegung auf der Grundlage kritischer Verformungen dem werkstoffmechanischen Verhalten der Kunststoffe besser entspricht als die herkömmliche, spannungsbezogene Betrachtungsweise und auch sonst mancherlei Vorteile bietet, wurde schon um 1970 erkannt und publik gemacht [1]. Sie hat sich in der Praxis bestens bewährt und ist geeignet, konsequent angewendet zu werden [2, 3].

Die dehnungsbezogene Auslegung geht davon aus, dass bei Erreichen einer bestimmten Dehnungsgrösse im Werkstoff unabhängig vom Spannungszustand ein Versagensmechanismus ausgelöst wird, der durch eben diese Auslegung vermieden werden soll. Grundsätzlich sind bei statischer oder quasistatischer Belastung drei Versagenskriterien zu unterscheiden: Rissbildung im Mikrobereich, Verstreckung oder Bruch, die im Spannungs-Dehnungsdiagramm durch entsprechende Spannungs- oder Dehnungsgrenzwerte zum Ausdruck kommen (Bild 2).

Versagenskriterien

Beim Bruchversagen ist die Bruchdehnung ϵ_B der massgebende Kennwert, der allenfalls bei Kunststoffen mit sprödem Verhalten als Versagenskriterium beigezogen werden kann. Die Verstreckung, ab der die Verformung ohne Anstieg der nominellen Spannung bei zunehmender Querschnittseinschnürung grosse Ausmasse annehmen kann, ist eine Versagensform bei Werkstoffen mit zähem Verhalten. Sie wird durch die Streckdehnung ϵ_Y charakterisiert. Für die Grössen von Bruch- und Streckdehnung sei an dieser Stelle

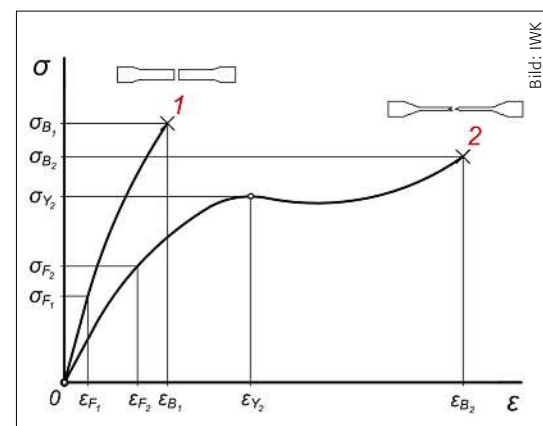


Bild: IWK

Bild 2: Versagensverhalten: Spannungs-Dehnungs-Diagramme aus dem Zugversuch (schematisch):

1: Sprödes Verhalten mit Trennbruch; 2: Zähes Verhalten mit Verstreckung und Verformungsbruch; F: Rissbildung (Fliezzonen, Crazes, Mikrorisse); Y: Verstreckung; B: Bruch

auf die bekannten Werkstoffdatenbanken [4, 5] verwiesen.

Das Versagenskriterium Rissbildung ist das strengste. Es erfasst die Tatsache, dass bei allen Kunststoffen weit unterhalb von Streckdehnung oder Bruchdehnung irreversible Verformungen auftreten, die auf Vorgänge im Mikrobereich wie Crazebildung oder Mikrorissbildung zurückzuführen sind und zunehmende Nichtlinearitäten im Spannungs-Dehnungs-Verhalten und bei transparenten Kunststoffen eine Trübung bewirken. Die diesen Vorgängen zugeordneten makroskopischen Dehnungen, in der Fachwelt als Fliessdehnung ϵ_F bekannt, nehmen bei längerer Belastungsdauer einen von Spannungszustand, Temperatur und andern Einflüssen weitgehend unabhängigen Grenzwert an, der als Fliessgrenzdehnung $\epsilon_{F\infty}$ oder kritische Dehnung ϵ_K bezeichnet wird (Bild 3). Dieser weist eine für die einzelnen Werkstoffgruppen

typische Größenordnung auf (Tab. 1). Deren messtechnische Bestimmung, die sich nicht ganz einfach gestaltet, ist in jüngerer Zeit wieder Gegenstand der Forschung [6].

Verformungsbedingung

Bei der dehnungsbezogenen Auslegung handelt es sich also darum, unter den im Bauteil auftretenden Hauptdehnungen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die grösste positive Dehnung ϵ_{max} zu ermitteln und in der Verformungsbedingung

$$\epsilon_{max} = \max(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \leq \epsilon_{zul} = \epsilon_G \cdot \frac{C}{S} \quad (1)$$

der als zulässig festgelegten Dehnung ϵ_{zul} gegenüberzustellen. Der Dehnungs-Grenzwert ϵ_G steht darin für die Dehnung bei Eintreten des als massgebend betrachteten Versagensmechanismus im einachsigen Spannungszustand in der Werkstoffprüfung. Mit dem Einflussfaktor C können allfällige Einflüsse auf den Dehnungs-Grenzwert berücksichtigt werden, wenn die Anwendungsbedingungen von jenen der Werkstoffprüfung merklich abweichen. Der Sicherheitsfaktor $S \leq 1$ gewährleistet, dass im Betrieb der Dehnungs-Grenzwert nicht erreicht wird, dass also ein Versagen mit hinreichender Sicherheit ausgeschlossen werden kann.

Die maximale Dehnung tritt stets in Richtung der absolut grössten Hauptspannung auf. Werden die Hauptspannungen gemäss $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ nummeriert, so gilt also auch $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$. Man beachte dabei, dass Null grösser ist als jeder negative Wert, dass also im hydrostatischen Spannungszustand (allseitig gleicher Druck)

Kunststoffgruppe	$\epsilon_{f,\infty}$ [%]
Thermoplaste, amorph	
- ungefüllt	0,6 ÷ 1,0
- gefüllt	0,3 ÷ 0,5
Thermoplaste, teilkristallin, steif	
- ungefüllt	2,0 ÷ 4,0
- gefüllt	1,0 ÷ 2,0
Thermoplaste, teilkristallin, weich	
- ungefüllt	3,0 ÷ 6,0
- gefüllt	2,0 ÷ 3,0
Thermoplaste, glasmattenverstärkt	0,2 ÷ 0,7
Elastomere, gefüllt	≈ 5,0
Duroplaste	
- unverstärkt	0,1 ÷ 0,2
- UD-verstärkt	0,05 ÷ 0,2

Tabelle 1: Größenordnung der Fließgrenzdehnung bei verschiedenen Kunststoffgruppen [2].

keine positive Dehnung auftritt und damit die Verformungsbedingung kein adäquates Kriterium darstellt. Dieses Vorgehen entspricht der Anwendung der Grösstdehnungs-Hypothese zur Umrechnung eines mehrachsigen Spannungszustandes in einen einachsigen Vergleichsspannungszustand [7]. Bei Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM) ist demnach die grösste Hauptdehnung (Principal Total Strain Max) auszuwerten und nicht etwa eine Vergleichsspannung wie jene nach von Mises (Equivalent von Mises Stress), welche auf der Gestaltänderungsenergie-Hypothese beruht.

Reiner Schub

Die Beanspruchungen auf Schub und Torsion sind vom Spannungszustand her nicht zu unterscheiden, da beide zu Schub-

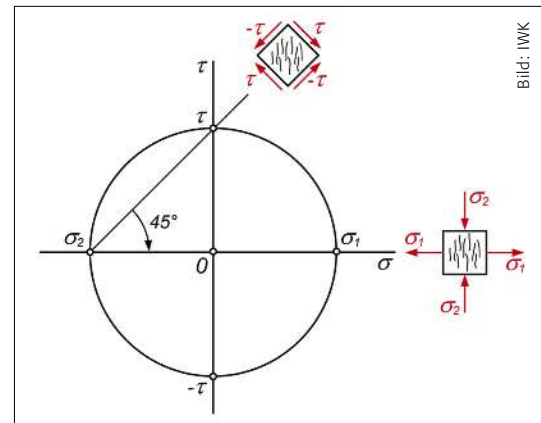


Bild 4: Zustand reinen Schubes: Abbildung im σ, τ -Koordinatensystem (Mohrscher Spannungskreis) mit angedeuteter Mikrorissbildung senkrecht zur grössten Normalspannung.

spannungen führen. Dieser Zustand reinen Schubes wird im σ, τ -Koordinatensystem als Mohrscher Kreis [8] mit Zentrum im Nullpunkt abgebildet (Bild 4). Daraus geht hervor, dass die Drehung der unter Schubspannung τ_{max} stehenden Schnittflächen um 45° zu Ebenen führt, an denen die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 wirken, und es gilt

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max} \quad (2)$$

Mit σ , als dem positiven Spannungswert kann unter Verwendung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes [9, S. C 31] aus der Verformungsbedingung (1) die Beziehung

$$\epsilon_{max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E_C} \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2) = \frac{1 + \mu}{E_C} \cdot \tau_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_{max}}{G_C} \leq \epsilon_{zul} \quad (3)$$

entwickelt werden. Darin bedeuten E_C, G_C und μ der Kriechmodul, der Schubmodul und die Poisson- oder Querkontraktionszahl des als isotrop betrachteten Werkstoffs; sie sind miteinander verknüpft durch

$$G_C = \frac{E_C}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (4)$$

Diese Steifigkeits-Kennwerte sind je nach Anwendungsbedingungen von Fall zu Fall in Abhängigkeit von Belastungszeit und Temperatur zu bestimmen [10, 11].

Scherung

Ein Sonderfall der Schubbeanspruchung stellt die Scherung oder Abscherung dar,

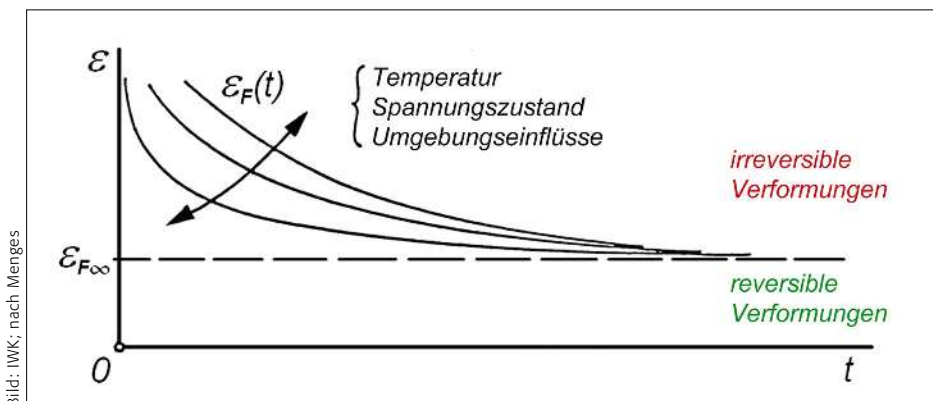


Bild 3: Dehnungsgrenzen als Auslegungskriterien für statische und schwingende Belastungen: Einflüsse auf die Grenze zwischen reversiblen und irreversiblen Verformungen (Schematisch ϵ_F : Fließdehnung; $\epsilon_{F,\infty}$: Fließgrenzdehnung

Bild: IWK, nach Menges

Bild: IWK

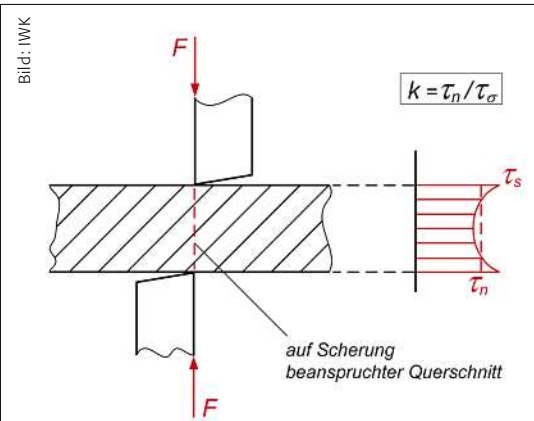


Bild 5: Scherung: Schubspannungsverteilung im auf Scherung beanspruchten Querschnitt mit Schubverteilungsfaktor k.

bei der die äusseren Kräfte (Aktion und Reaktion) in der Schnittebene auftreten und, da ihre Wirkungslinien praktisch zusammenfallen (Bild 5), kein Biegemoment hervorrufen. Im einfachsten Fall ist die Schubspannung τ_s im ganzen Querschnitt gleich und entspricht dem Quotienten aus Kraft F und Querschnittsfläche A . Bei ungleicher Verteilung übersteigt das Spannungsmaximum τ_s den Nennwert $\tau_n = F/A$, was durch den Schubverteilungsfaktor

$$k = \frac{\tau_s}{\tau_n} = \frac{\tau_s \cdot A}{F} \quad (5)$$

ausgedrückt werden kann. Bei überall gleicher Spannung ist $k = 1$, bei linearer Verteilung in Dreiecksform wird $k = 2$ und bei parabolischem Verlauf gilt $k = 3$. Reale Spannungsüberhöhungen können, je nach lokaler Bauteilgeometrie, Kerbfekten und Krafteinleitung, auch deutlich höher sein (Bild 6).

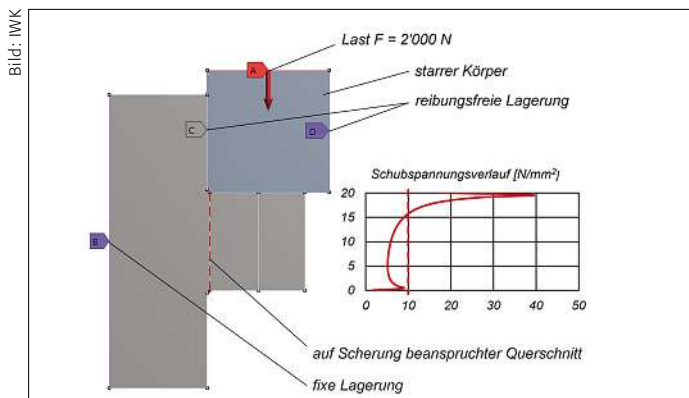


Bild 6: Spannungsverlauf im scherbeanspruchten Querschnitt mit Nennspannung 10 N/mm², ermittelt mit einer FEM-Analyse.

Die maximale Dehnung ist somit unter Anwendung von (3) bestimmt durch

$$\epsilon_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_s}{G_C} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{F}{G_C \cdot A} = \frac{1 + \mu}{E_C} \cdot k \cdot \frac{F}{A} \leq \epsilon_{zul} \quad (6)$$

und die Kraft F unterliegt der Bedingung

$$F \leq \frac{2}{k} \cdot G_C \cdot A \cdot \epsilon_{zul} = \frac{1}{k} \cdot \frac{E_C \cdot A}{1 + \mu} \cdot \epsilon_{zul} \quad (7)$$

Torsion

Bei Torsion bestimmt sich die maximale Schubspannung τ_t bekanntlich als Quotient von Torsionsmoment M_t und Torsionswiderstandsmoment W_t . Dieses Torsionswiderstandsmoment entspricht bei rotationssymmetrischen Querschnitten dem polaren Widerstandsmoment W_p . Bei beliebigen Querschnittsformen ist es, wie übrigens auch das Torsionsträgheitsmoment I_t , nicht elementar bestimmbar, kann jedoch einschlägigen Tabellenwerken und Handbüchern entnommen werden [9, S. C 27 ff.]. Am Ort der grössten Schubspannung wirkt auch die maximale Dehnung

$$\epsilon_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_t}{G_C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t}{G_C \cdot W_t} = \frac{1 + \mu}{E_C} \cdot \frac{M_t}{W_t} \leq \epsilon_{zul} \quad (8)$$

Hieraus ergibt sich für das Torsionsmoment die Begrenzung

$$M_t \leq 2 \cdot G_C \cdot W_t \cdot \epsilon_{zul} = \frac{E_C \cdot W_t}{1 + \mu} \cdot \epsilon_{zul} \quad (9)$$

Auch der Verdrehwinkel φ der zwei um die Stablänge l auseinanderliegenden Stirnflächen ist durch die zulässige Dehnung limitiert gemäss

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G_C \cdot I_t} \leq 2 \cdot \frac{W_t \cdot l}{I_t} \cdot \epsilon_{zul} \quad (10)$$

welch letztere Bedingung für kreiszylindrische Stäbe des Aussendurchmessers d vereinfacht werden kann zu

$$\varphi \leq 4 \cdot \frac{l}{d} \cdot \epsilon_{zul} \quad (11)$$

Torsion und Biegung

Wenn sich Torsion und Biegung überlagern, was oft der Fall ist, so überlagern sich auch die zugehörigen Verteilungen von Schub- und Normalspannungen zu einem zweiachsigen Spannungszustand. Treten die Spannungsmaxima $\tau_t = M_t/W_t$ bzw. $\sigma_b = M_b/W_b$ im selben Punkt der Querschnittsperipherie auf, so z.B. bei rotationssymmetrischem Querschnitt, ergibt sich für die grösste Dehnung die Beziehung

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_b}{2 \cdot E_C} \cdot \left[1 - \mu + (1 + \mu) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{\tau_t}{\sigma_b} \right)^2} \right] \leq \epsilon_{zul} \quad (12)$$

Etwas komplizierter wird die Sache, wenn die beiden Spannungshöchstwerte in verschiedenen Punkten des Querschnittsrands auftreten, wie dies bei beliebigen Querschnittsformen der Fall sein kann. So sind bei rechteckigen Querschnitten (Bild 7) die Ecken schubspannungsfrei, und in den jeweiligen Seitenmitten liegen relative Extremwerte vor. Das absolute Maximum $\tau_t = M_t/W_t$ tritt in der Mitte der längeren Seite auf. Wenn die Biegeachse (neutrale Achse) parallel dazu verläuft (Bild 7a), ist an diesem Ort auch die Normalspannung maximal, und die grösste

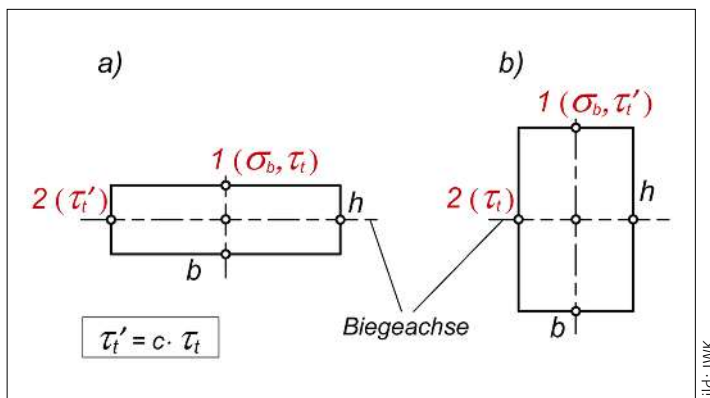


Bild 7: Auf Torsion und Biegung beanspruchter Rechteckquerschnitt: Punkte extremer Spannungswerte.

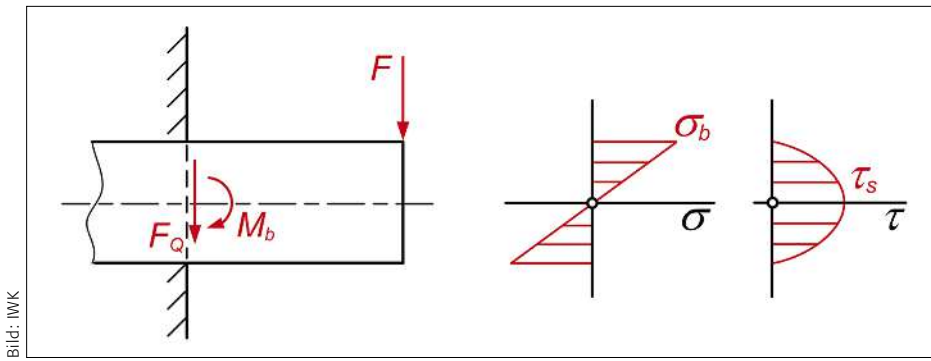


Bild: IWK

Bild 8: Querkraftbiegung: Verteilung der Normal- und der Schubspannung im auf Biegung und Schub beanspruchten Querschnitt.

Dehnung ist durch Gleichung (12) bestimmt.

Verläuft die Biegeachse jedoch parallel zur kürzeren Rechteckseite (Bild 7b), so überlagert sich in deren Mitte (Punkt 1) nur das relative Schubspannungsmaximum

$$\tau'_t = c \cdot \tau_t \quad (13)$$

mit der grössten Normalspannung σ_b . Der Faktor c ist eine Funktion des Seitenverhältnisses $n = h/b \geq 1$, [9, S. C 27] beschreibbar in der Form

$$c = 1 - 0,257 \cdot [1 - \exp(-1,6 \cdot (n - 1))] \quad (14)$$

Für die grösste Dehnung in diesem Punkt 1 gilt nun

$$\epsilon_{max,1} = \frac{\sigma_b}{2 \cdot E_C} \cdot \left[1 - \mu + (1 + \mu) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \left(c \cdot \frac{\tau_t}{\sigma_b} \right)^2} \right] \leq \epsilon_{zul} \quad (15)$$

Je nach den Grössen von μ , c und τ_t/σ_b , kann die absolut grösste Dehnung aber auch in der Mitte der längeren Seite auf der neutralen Biegeachse im Punkt 2 auftreten und entsprechend (8) den Wert

$$\epsilon_{max,2} = \frac{1 + \mu}{E_C} \cdot \tau_t \leq \epsilon_{zul} \quad (16)$$

annehmen. Somit sind im Zweifelsfall sicherheitshalber beide Formeln (15) und (16) auszuwerten.

Biegung und Schub

Die Kombination von Biegung und Schub, wie sie bei Querkraftbiegung und damit relativ häufig auftritt, ist an dieser Stelle nicht relevant, weil am Ort des Maximums der einen Spannung die jeweils

andere Spannung null ist (Bild 8). In aller Regel liegt die grösste Dehnung in der Randfaser des Querschnitts vor, hervorgerufen durch die grösste Normalspannung σ_b . Dass die grösste Dehnung an der Stelle des Schubspannungsmaximums auf der neutralen Achse auftritt, ist die Ausnahme, und zwar nur bei sehr kurzen Biegeträgern, bei denen der Abstand zwischen der Kraftwirkungslinie und dem betrachteten Querschnitt weniger als etwa ein Drittel der Querschnittshöhe beträgt. In diesem wenig realistischen Fall wäre die Bedingung (6) massgebend.

Schlussbetrachtung

Auch wenn die Auslegung von Kunststoffteilen in der Praxis kaum mehr aufgrund analytischer Berechnungen allein erfolgt, da sich deren Anwendung auf einfache Bauteilgeometrien beschränkt, so ist gerade auch beim Einsatz von Simulationstools für die numerische Strukturanalyse komplexerer Konstruktionen die Kenntnis der grundlegenden Gesetze der Bauteilauslegung unerlässlich.

Bei Kunststoffteilen empfiehlt sich in den meisten Fällen eine dehnungsbezogene Betrachtungsweise, denn sie ist werkstoffmechanisch relevant und einfach anwendbar. Dies gilt auch bei Beanspruchungen wie Schub und Torsion, die zu Schubspannungen führen. Die hier aufgezeigten Lösungen für die Bestimmung der maximalen Dehnung unter Schub basieren auf der Theorie des Spannungs- und Verformungszustandes, mit der auch linear-viskoelastisches Werkstoffverhalten erfasst wird. Sie lassen sich sowohl für erste Handrechnungen als auch für Referenzrechnungen bei der

Struktursimulation komplexerer Bauteile verwenden.

Literatur

- [1] Menges, G.: Ingenieurmässige Festigkeitsrechnung für Spritzgussteile aus Thermoplasten. *Kunststoffe* 57(1967)1, S. 2–8
- [2] Kunz, J.: Ein Plädoyer für die dehnungsbezogene Auslegung. *Kunststoffe* 101(2011)4, S. 50–54
- [3] Skrabala, O.; Bonten, C.: Kritische Dehnung als Parameter für die Versagensbestimmung. *Kunststoffe* 102(2012)9, S. 82–85
- [4] Material Data Center – Werkstoffdaten. M-Base Engineering+Software GmbH, Aachen; www.materialdatacenter.com
- [5] Campus Werkstoffdatenbank. CWFG mbH, Frankfurt/Main; www.campusplastics.com
- [6] Skrabala, O.; Bonten, C.: Bestimmung der kritischen Dehnung mittels Schall-emissionsanalyse. 23. Stuttgarter Kunststoff-Kolloquium Stuttgart 6. – 7. März 2013. Tagungsband, S. 179–184
- [7] Navier, C. L. M. H., Saint-Venant, A. J. C.: *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. 3. Aufl., Paris 1864
- [8] Mohr, O.: Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes. *Zivilingenieur* 28(1882), S. 113–156
- [9] Lackmann, J., Villwock, J., in: Grote, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Verlag Berlin, 24. Aufl., 2014
- [10] Kunz, J.: Kriechmodul-Abschätzung und Kriechbeständigkeit. *KunststoffXtra* 4(2014)3, S. 23–26
- [11] Kunz, J.: Die Querkontraktionszahl in der Konstruktionspraxis. *KunststoffXtra* 1(2011)6, S. 20–23

Kontakt

IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung
 Oberseestrasse 10
 CH-8640 Rapperswil
 Telefon +41 (0)55 222 47 70
jkunz@hsr.ch, www.iwk.hsr.ch