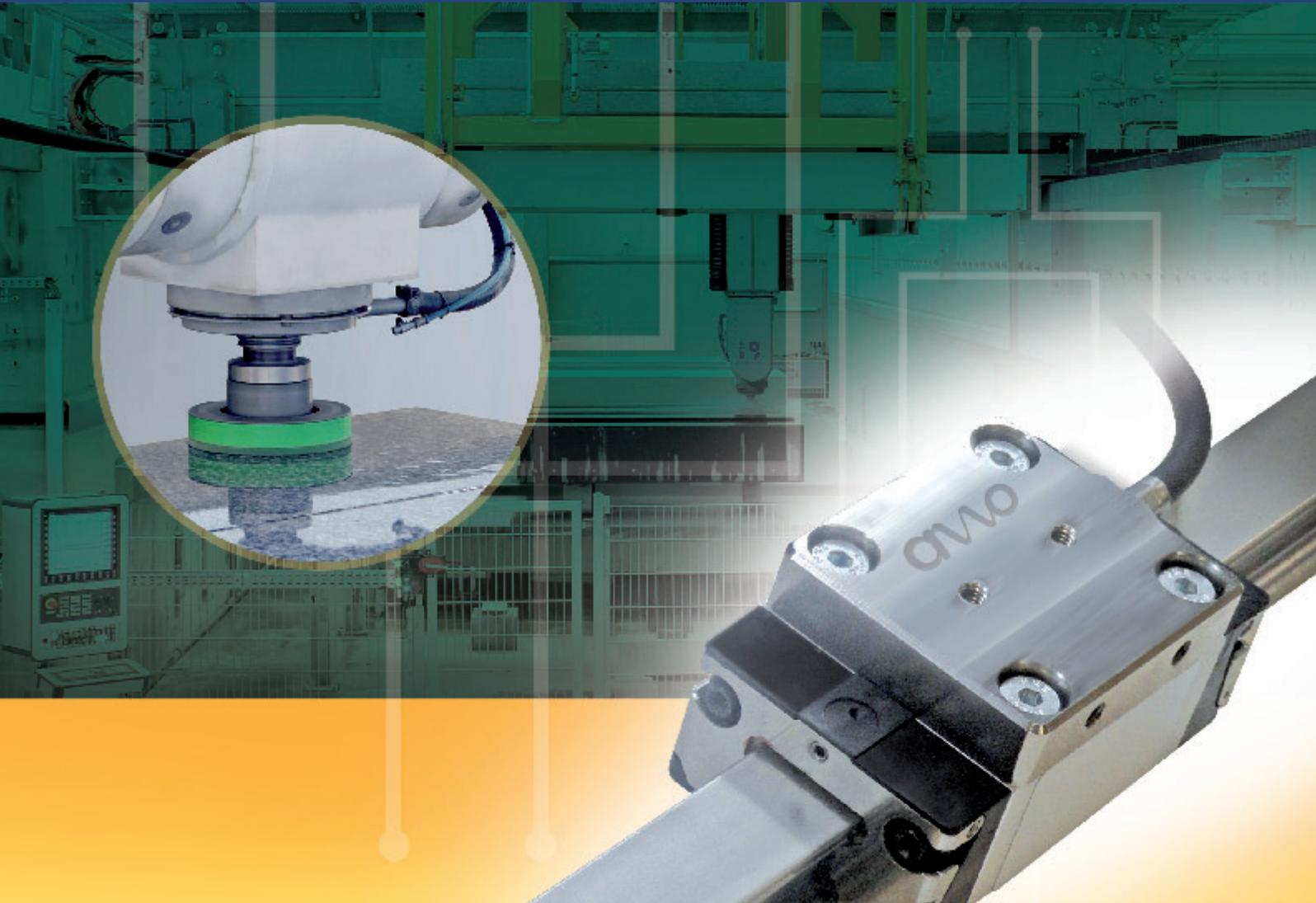


Konstruktion

Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe



Kontaktmechanik: Längeneinfluss auf die Abplattung paralleler Zylinder

J. Kunz, D. Jakober, M. Studer

J. Kunz, D. Jakober, M. Studer

Kontaktmechanik: Längeneinfluss auf die Abplattung paralleler Zylinder

Contact Mechanics: Influence of the Length of Parallel Cylinders on the Flattening

Inhalt: Für die Berechnung der Abplattung paralleler Zylinder (Bild 1) als wichtige kontaktmechanische Größe wird eine neue Formel vorgestellt. Diese erweitert die bisherigen Erkenntnisse, indem sie den Einfluss des Verhältnisses von Länge zu Durchmesser des Zylinders in Funktion der Poissonzahl berücksichtigt. Dieser Einfluss beruht auf der Behinderung der Querdehnung in den Bereichen mit dreiaxsigem Spannungszustand. Da sich dieses komplexe Problem nicht rein mathematisch lösen lässt, wurde die Untersuchung auf der Grundlage von FEM-Analysen mit geeigneter Variation der Parameter geführt.

Abstract: A new formula is presented to calculate the flattening of parallel cylinders (Bild 1) as an important characteristic parameter of the contact mechanics. The formula extends the recent findings, taking into account the influence of the relation between the cylinder's length and diameter as a function of the Poisson's Ratio. This influence is based on the prevention of the transverse strain in areas with triaxial stress state. As this complex problem cannot be solved purely mathematically, the investigation was carried out based on FEM-analysis with a suitable parameter variation.

1 Einleitung

Die Kontaktmechanik befasst sich mit der Beschreibung der Spannungen und Verformungen, die bei der Berührung zweier Körper unter Kraftwirkung entstehen. Ist die Oberfläche von mindestens einem der beiden Körper im Kontaktbereich gekrümmt, so entsteht aus dem theoretischen Berührungspunkt bzw. der theoretischen Berührungslinie eine Kontaktfläche, über

welcher sich der Kontaktdruck im Allgemeinen ungleichmäßig verteilt. Diese Oberflächenbeanspruchung setzt sich in Form von Spannungen ins Innere der beiden Körper fort.

Die allgemeine Lösung solcher Kontaktprobleme geht auf Hertz zurück [1, 2]. Sie basiert auf der Elastizitätstheorie, setzt also die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und damit die Beschränkung auf isotropes, linear-elastisches Werkstoffverhalten voraus. Die Hertzsche Theorie verlangt überdies theoretische Punktberührung und derart kleine Kontaktflächen im Vergleich zu den Körperabmessungen, dass sich die Spannungsverteilungen im Körperinnern kaum von jenen im unendlichen Halbraum unterscheiden. Die Körperoberflächen werden als vollkommen glatt, also frei von tribomechanischen Effekten betrachtet und sollen im Kontaktbereich als Teil einer idealgeometrischen Körpergestalt durch quadratische Gleichungen beschrieben werden können. Die Belastung wird als statisch bzw. quasi-statisch vorausgesetzt.

Für die praktische Anwendung der mathematisch anspruchsvollen Hertzschen Theorie stehen rezepthaft anwendbare Formeln zur Verfügung, mit denen die Abmessungen der Kontaktfläche, der maximale Kontaktdruck und die als Abplattung bezeichnete

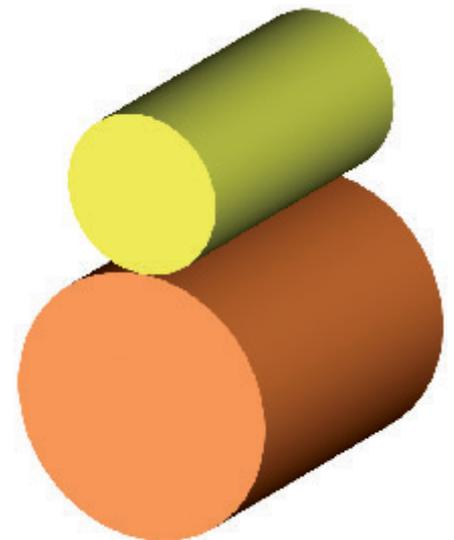


Bild 1
Kontakt paralleler Zylinder

Annäherung der beiden Körper (Bild 2) berechnet werden können [3, 4].

2 Aktueller Erkenntnisstand

Der Kontakt zweier gleich langer achsparalleler Zylinder mit den Radien R_1 bzw. R_2 lässt sich indessen mit der Hertzschen Theorie nicht direkt erfassen, da dieser Fall die Voraussetzung der theoretischen Punktberührung nicht erfüllt. Hertz selber hatte schon darauf hingewiesen, dass seine Theorie bei direkter Anwendung auf parallele

Autoren

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz
Institutspartner Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK)
HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Oberseestrasse 10, 8640 Rapperswil/CH
E-Mail: iwk@hsr.ch
www.iwk.hsr.ch

Dieter Jakober, BSc FHO
SKF Actuation System (Liestal) AG
Oristalstraße 97, 4410 Liestal/CH
E-Mail: dieter.jakober@skf.com
vormals wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK

Dr.-Ing. Mario Studer
Geberit International AG
Schachenstraße 77, 8645 Jona/CH
E-Mail: mario.studer@geberit.com
vormals wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK

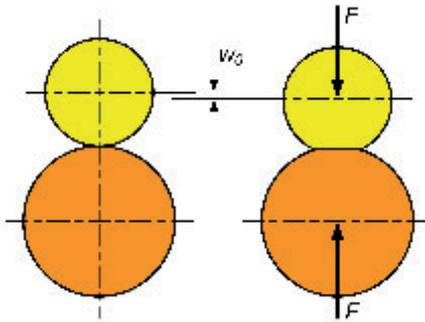


Bild 2
Abplattung: Radiale Annäherung der beiden Zylinderachsen

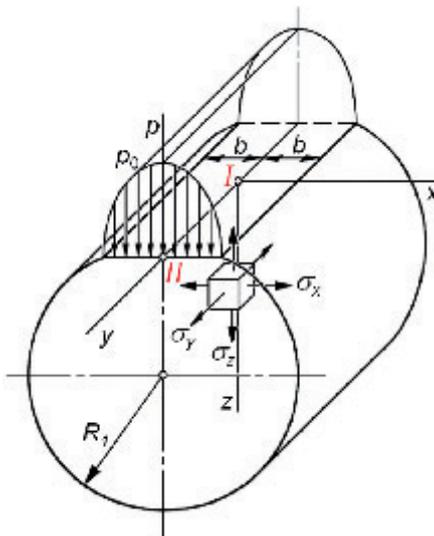


Bild 3
Kontaktmechanische Beanspruchung eines Zylinders bei paralleler Belastung. Spannungszustände: Punkt I: dreiachsig, Punkt II: zweiachsig

Zylinder aus geometrischen Gründen unsinnige Resultate ergäbe [2]. Denn die Kontaktfläche würde zu einer unendlich langen und unendlich schmalen Ellipse entarten, was der Realität widerspricht. In Wirklichkeit ist die Kontaktfläche praktisch ein Rechteck, das sich über die ganze Länge l des Zylinders erstreckt. Mittels Grenzwertbetrachtungen konnte Hertz diese Kontaktfläche als rechteckigen Ausschnitt

einer unendlichen langen Ellipse mit der kleinen Halbachse b sowie den sich darüber halbelliptisch wölbenden Kontaktdruck mit dem Maximum p_0 (Bild 3) bestimmen und für beide Größen einfach handhabbare Formeln ableiten. Für die Abplattung jedoch konnte er keine Formel entwickeln.

Für die Annäherung w_0 der beiden parallelen Zylinderachsen unter Kraftwirkung F ist bis heute keine theoretisch-analytische Lösung bekannt geworden, die auf beliebige Krümmungsverhältnisse der beiden Zylinder anwendbar wäre (Bild 4). Zwar wurde auf verschiedenen Wegen immer wieder versucht, dem noch offenen Problem beizukommen. Die daraus hervorgehenden Lösungen sind jedoch, wie früher schon dargestellt [8], allesamt unbefriedigend und unter sich zum Teil recht widersprüchlich, weshalb ihre Anwendung in der Praxis entsprechend problematisch ist. Dies dürfte auch der Grund dafür sein, dass in technischen Handbüchern [3, 4] für die Abplattung paralleler Zylinder nach wie vor keine Berechnungsformel angegeben wird.

Aufgrund theoretischer Überlegungen verschiedener Autoren [5–10] darf heute davon ausgegangen werden, dass sich die Abplattung w_0 proportional zu belastenden Kraft F und umgekehrt proportional zur Werkstoffsteifigkeit E_v und zur Zylinderlänge l verhält. Bemerkenswerterweise ist sie praktisch unabhängig von den Krümmungsradien der beiden Kontaktpartner und den Krümmungsverhältnissen. Diese Erkenntnis ist theoretisch anhand von Relations- und Dimensionsanalysen belegbar und sowohl experimentell als auch FEM-analytisch bestätigt worden [8]. Sie leitet in die Beziehung

$$w_0 \approx C \cdot \frac{F}{E_v \cdot l} \quad (1)$$

mit C als einer Konstanten und dem Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$E_v = 2 \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad (2)$$

der als harmonischer Mittelwert die Elastizitätsmodulen E_1 und E_2 der beiden Kontaktkörper 1 und 2 zusammenfasst. Allerdings klaffen die auf unterschiedlichem Weg erhaltenen Zahlenwerte für die Konstante C in (1) mit 1,16 bis 5,7 derart weit auseinander, dass lediglich von einer qualitativen Übereinstimmung gesprochen werden kann. Beschränkt man sich auf die Publikationen [6–8], die auch experimentelle Untersuchungen miteinbeziehen, so liegen die C -Werte im Bereich von 4,0 bis 5,7. Letztere Zahl 5,7 erscheint realistisch, da sie auch durch FEM-analytische Berechnungen abgestützt ist [8], obwohl sie als Mittelwert einer statistischen Auswertung der Ergebnisse aller untersuchten Krümmungskonfigurationen eine relativ große Standardabweichung von $0,78 \triangleq 13,7\%$ aufweist. Damit kann

$$w_0 \approx 5,7 \cdot \frac{F}{E_v \cdot l} \quad (3)$$

als vorläufiges Ergebnis gelten. Dieses hat sich jedenfalls in der Praxis als durchaus brauchbare Näherung erwiesen, so auch bei der Entwicklung von Berechnungsformeln für verschiedene Problemstellungen bei zylindrischen Kunststoff-Laufrollen [11–15].

Versucht man, das unterschiedliche Querkontraktionsverhalten der Werkstoffe miteinzubeziehen, so lässt sich mit Einführen der Vergleichs-Poissonzahl

$$\mu_v = \sqrt{\frac{E_1 \cdot \mu_2^2 + E_2 \cdot \mu_1^2}{E_1 + E_2}} \quad (4)$$

die Beziehung (3), ausgehend vom Wert $\mu_v = 0,3$, zu

$$w_0 \approx 6,24 \cdot \frac{F}{l} \cdot \frac{1 - \mu_v^2}{E_v} \quad (5)$$

verallgemeinern [16]. Damit können auch unterschiedliche Poissonzahlen μ_1 und μ_2 der beiden Kontaktkörper 1 und 2 erfasst werden.

Keinen Einfluss der Krümmungsverhältnisse auf die Abplattung enthält auch die Zahlenwertgleichung

$$w_0 \approx \frac{4,05}{10^5} \cdot \frac{F^{0,925}}{l^{0,85}} \quad (6)$$

mit der Kraft F [N] und der Zylinderlänge l [mm], entwickelt für die Paarung

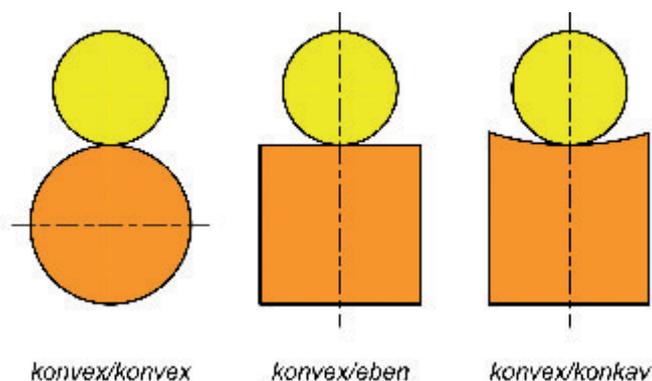


Bild 4
Unterschiedliche Krümmungsverhältnisse des Kontakts paralleler Zylinder

Stahl/Stahl [17]. Die darin enthaltene Linearitätsabweichung der Kraft ist so gering, dass von einer annähernden Proportionalität zwischen F und w_0 gesprochen werden kann. Leider weist der Längeneinfluss in die falsche Richtung, d.h. die Abplattung würde nach (6) bei gleichbleibender Streckenlast F/l mit wachsender Zylinderlänge zunehmen, was natürlich nicht sein kann.

Als aktueller Stand der Erkenntnisse kann somit von der Gültigkeit der Beziehung (1) ausgegangen werden, wonach sich die Abplattung proportional zur Linienlast F/l und umgekehrt proportional zum Vergleichs-Elastizitätsmodul E_V verhält und unabhängig von den Krümmungsverhältnissen ist.

3 Problemstellung

Nach (1) bzw. (3) ist die Abplattung bei vorgegebener Kraft F umgekehrt proportional zur Zylinderlänge l , also bei gleichbleibender Streckenlast F/l konstant. Dies ist insofern als Näherung zu betrachten, als in Wirklichkeit die Querdehnung mit zunehmender Zylinderlänge stärker behindert wird und damit die Abplattung abnehmen muss. Daher stellte sich die Aufgabe, Beziehung (1) zu einer Berechnungsformel zu erweitern, die diesem Effekt Rechnung trägt und sich in den Satz der Hertzschen Berechnungsformeln einfügt.

Elastizitätstheoretische Überlegungen zeigen, dass bei endlicher Zylinderlänge in der Kontaktzone unterschiedliche Spannungszustände herrschen. Während stirnseitig (Bild 3, Punkt II) ein zweiachsiger Spannungszustand (ZSZ) vorliegt, führt die im Mittelbereich der Zylinderlänge (Bild 3, Punkt I) stark behinderte Querdehnung zu einem praktisch zweiachsigen Verformungszustand (ZVZ). Damit verbunden ist ein dreiachsiger Spannungszustand (DSZ) mit allseitigem Druck. Dies bedeutet, dass bei sehr kurzen, scheibenförmigen Zylindern mit kleinem Verhältnis von Länge l zu Durchmesser d der ZSZ dominiert. Mit zunehmendem Verhältnis l/d wächst der Bereich des DSZ, verbunden mit einer entsprechenden geometrisch bedingten Versteifung, was sich in geringerer Abplattung auswirkt. Das Steifigkeitsverhältnis zwischen dem idealen ZSZ und dem DSZ mit allseitig gleichem Druck beträgt bekanntlich $(1 - \mu) / (1 - \mu - 2 \cdot \mu^2)$. In Realität dürfte der Unterschied wegen der endlichen Zylinderlänge und der im Zylinderquerschnitt sehr eng

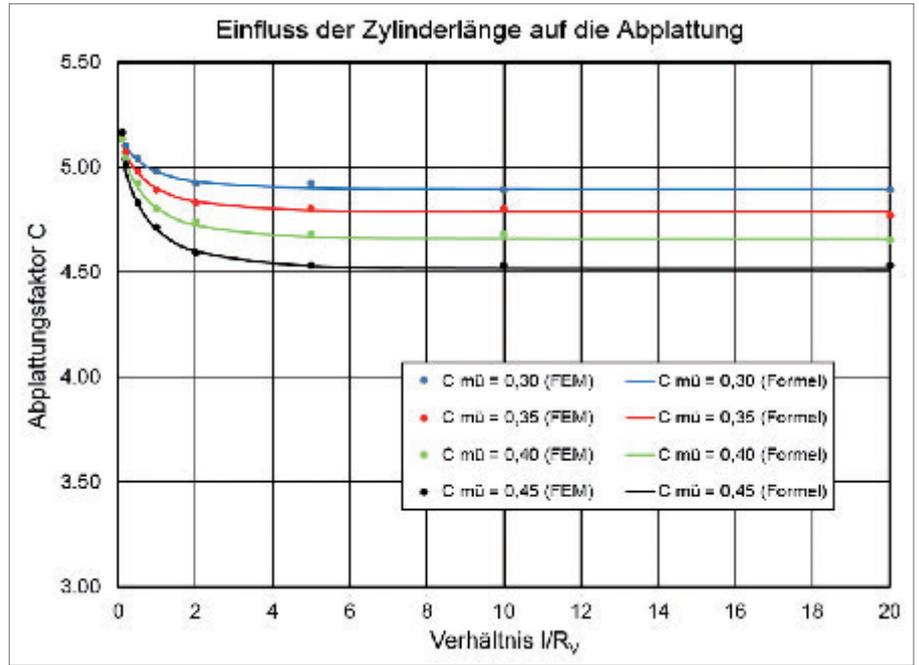


Bild 5 Einfluss der Zylinderlänge auf den Abplattungsfaktor

begrenzten Kontaktzone nicht so ausgeprägt ausfallen und, wie dargelegt, vom Verhältnis l/d abhängen. Es ist zu erwarten, dass der Übergang vom ZSZ zum DSZ weitgehend einer reziproken Exponentialfunktion folgt. Die Kenntnis dieses Verlaufes in Funktion der Poissonzahl ist der Schlüssel zur Entwicklung einer gegenüber (1) bzw. (3) verbesserten Berechnungsformel.

Angesichts der Komplexität der Zusammenhänge ist die Lösung dieser Aufgabe rein theoretisch-analytisch nicht zu bewältigen. Somit bietet sich ein rechnerisch-numerisches Vorgehen an, wie es sich bereits in verschiedenen früheren Untersuchungen aus dem Themenkreis Kontaktmechanik bewährt hat.

Dass im Kontaktbereich des Zylinders entlang der theoretischen Kontaktlinie unterschiedliche Spannungszustände herrschen, könnte sich natürlich auch auf die Form der Kontaktfläche auswirken. Eine merkliche Abweichung von der Rechteckform würde sich auch auf die Verteilung des Kontaktdruckes über dieser Kontaktfläche auswirken. Bei Einhaltung der Hertzschen Voraussetzungen ist aber von einer rechteckförmigen Kontaktfläche auszugehen, was sich in der Untersuchung schließlich bestätigt hat.

4 Vorgehen

Die Untersuchung basiert also auf der qualitativen Gültigkeit des Zusammen-

hangs (1). Darin ist der Faktor C jedoch nicht weiter als Konstante zu betrachten, sondern als eine vom Verhältnis l/d und damit auch von der Vergleichs-Poissonzahl μ_v abhängige Größe.

Da (1) von den Krümmungsverhältnissen unabhängig ist, kann sich die Untersuchung auf den Kontakt zweier gleich langer Zylinder beschränken, von denen der eine endliche Werte von Durchmesser $d = 2 \cdot R_1$ und Steifigkeit E_1 aufweist, während der andere als starrer Körper mit $E_2 \rightarrow \infty$ und unendlichem Krümmungsradius $R_2 \rightarrow \infty$, also ebener Oberfläche, modelliert wird. Dadurch wird jedoch die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse nicht eingeschränkt, wenn bei der Auswertung der Vergleichs-Elastizitätsmodul (2) mit $E_V = 2 \cdot E_1$ und die Vergleichs-Poissonzahl (4) mit $\mu_v = \mu_1$ eingesetzt werden. Bei dieser Krümmungssituation entspricht der Durchmesser d dem Vergleichs-Krümmungsradius

$$R_v = 2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{7}$$

sodass mit dem Verhältnis l/R_v anstelle von l/d alle Krümmungsverhältnisse einschließlich konvex/konkav (Bild 3) erfasst werden können.

Die FEM-numerische Analyse wurde, entsprechend den Voraussetzungen von Hertz, mit einem linear-elastischen Werkstoffmodell und reibungsfreiem Kontakt durchgeführt. Um insbesondere für die experimentelle Vali-

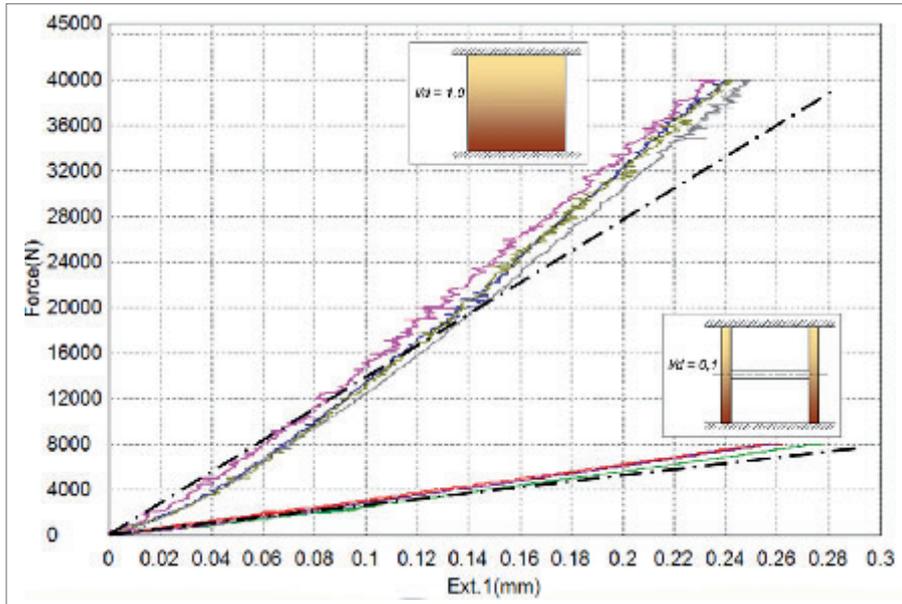


Bild 6

Mit Videoextensometrie gemessener Zusammenhang zwischen Kraft F (Force) und der Abplattung (Radiusänderung) $Ext. 1 = \Delta r = w_0$ bei gleicher Streckenlast bis maximal $F/l = 400 \text{ N/mm}$ – Strichpunktiert eingetragen sind die Verläufe gemäß Formel (8)

dierung messtechnisch vernünftig erfassbare Abplattungen zu erhalten, wurde mit $E_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ eine Größe gewählt, die einem technischen Kunststoff entspricht. Der Durchmesser des Zylinders 1 wurde mit $d = 100 \text{ mm}$ festgelegt und das Verhältnis l/R_V von 0,1 bis 20 variiert, und zwar bei stufenweise ansteigender Linienlast bis zum Maximum von $F/l = 200 \text{ N/mm}$. Für die Poissonzahl wurden die Werte 0,30, 0,35, 0,40 und 0,45 eingesetzt, um den Bereich technischer Konstruktionswerkstoffe weitgehend abzudecken.

Diese für die FEM-Analyse gewählten Zahlenwerte schränken die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse in keiner Weise ein. Denn erstens ist, wie im Kap. 2 dargelegt, die Unabhängigkeit der Beziehung (1) von den Krümmungsverhältnissen hinreichend belegt, und zweitens können entsprechend den Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik wegen $E_V \cdot w_0 = konst.$ in (1) die Elastizitätsmoduln beliebige Größen annehmen, also z. B. auch jene für Stahl oder andere metallische Werkstoffe, solange die Hertzsche Voraussetzung des linear-elastischen Verhaltens erfüllt ist.

Zur Absicherung der Resultate wurden mit Marc.Mentat und Ansys zwei verschiedene FEM-Programme mit den je bestgeeigneten Solid-Elementtypen 7 (8 Knoten Hexaeder) bzw. 187 (10 Knoten Tetraeder) benutzt. Die Konvergenzstudien führten zu einer extrem feinen Vernetzung im Umfeld des Kontaktbereichs mit Elementkantenlängen von 0,1 bis 0,5 mm. Dies ergab je nach Zylinderlänge selbst bei Ausnützung aller Symmetrieebenen mehrere 10^5 Elemente mit entsprechenden Rechenzeiten von wenigen Stunden bis zu drei Tagen. Da Beziehung (1) als Basis der Untersuchung hinreichend abgesichert ist, konnten sich experimentelle Untersuchungen darauf beschränken, den Einfluss des Verhältnisses l/R_V auf die Abplattung zu validieren.

5 Ergebnis

In der Untersuchung konnten der Einfluss von l/R_V und der Vergleichs-Poissonzahl μ_V klar herausgearbeitet und in der Formel

$$w_0 \approx 5,2 \cdot \frac{F}{E_V \cdot l} \left\{ 1 - 0,65 \cdot \mu_V^2 \cdot \left[1 - \exp \left(-1,3 \cdot \left(\frac{l}{R_V} \right)^{0,7} \right) \right] \right\} \quad (8)$$

beschrieben werden. Die Abplattung klingt in Funktion des Verhältnisses l/R_V wie vermutet mit einer reziproken Exponentialfunktion ab, die ab $l/R_V \approx 5$ praktisch die Asymptote erreicht (Bild 5). Erwartungsgemäß wirkt sich die

Behinderung der Querdehnung bzw. die Tendenz zum DSZ erst ab etwa $l/R_V > 0,5$ merklich aus, und zwar zwischen $\mu_V = 0,30$ und $\mu_V = 0,45$ mit gut 7 %. Damit hat sich die Überlegung bestätigt, dass das Steifigkeitsverhältnis zwischen kurzen und längeren Zylindern weniger stark ausfällt als zwischen dem idealen ZSZ und dem DSZ mit allseitig gleichem Druck. Die Reduktion des Steifigkeitsverhältnisses liegt in der Größenordnung von rund einem Drittel. Der Einfluss der Zylinderlänge auf die Abplattung beträgt damit maximal 13,4 %. Die Abweichung zwischen den FEM-Daten und den Werten nach Formel (8) beträgt im untersuchten Bereich maximal 2,2 % (Bild 5). Die Resultate der beiden eingesetzten FEM-Programme unterscheiden sich in der Größenordnung von 1 %. Die FEM-Ergebnisse zeigen ferner, dass die Kontaktflächen praktisch rechteckförmig sind und somit die Hertzschen Vorstellungen erfüllen.

Die experimentelle Überprüfung von (8) beschränkte sich auf den darin enthaltenen Term für den Längeneinfluss. Der grundsätzliche Zusammenhang (1) wurde bereits früher begründet [8], und der Zahlenwert $C \approx 5,2$ ging aus den FEM-Variationen hervor. Untersucht wurden Zylinder aus Polyacetal POM H natur Delrin vom Durchmesser $d = 100 \text{ mm}$ und den Längen $l = 10 \text{ mm}$ und $l = 100 \text{ mm}$ in der Kontaktsituation konvex/eben. Somit ist gemäß (7) der Vergleichs-Krümmungsradius $R_V = d = 100 \text{ mm}$. Die Zylinder wurden zwischen ebenen Druckplatten aus Stahl bis zu einer maximalen Linienlast $F/l = 400 \text{ N/mm}$ belastet. Für $l = 10 \text{ mm}$ wurden aus Stabilitätsgründen zwei Zylinderscheiben parallel angeordnet. Die Abplattung w_0 wurde als Änderung des Zylinderradius in Lastrichtung mittels Videoextensometrie gemessen (Bild 6), wobei zwei unterschiedliche Verfahren zur Anwendung kamen. Bei sehr kleinen Verformungen zeigte sich, wie übrigens auch in den FEM-Analysen und bei der Messung des Druck-Elastizitätsmoduls, eine leichte Abweichung von der Linearität des Zusammenhangs zwischen Kraft F und Abplattung w_0 . Unter der Linienlast $F/l = 200 \text{ N/mm}$ ergab sich mit $w_0 \approx 0,145 \text{ mm}$ für $l/R_V = 0,1$ und $w_0 \approx 0,137 \text{ mm}$ für $l/R_V = 1,0$ ein Längeneinfluss von rund 5,5 %. Bei der Vergleichsrechnung mit (8) beläuft sich der Längeneinfluss auf rund

5,2 % mit $w_0 \approx 0,154 \text{ mm}$ für den kürzeren bzw. $w_0 \approx 0,146 \text{ mm}$ für den längeren Zylinder. Hierbei wurden neben den bekannten Werkstoffkennwerten von Stahl für das POM der selbst gemessene Druck-Elastizitätsmodul $E_1 \approx 3340 \text{ N/mm}^2$ bzw. ein Vergleichs-Elastizitätsmodul $E_V = 6575 \text{ N/mm}^2$ und eine angenommene Vergleichs-Poissonzahl $\mu_V = 0,40$ eingesetzt. Mit $\mu_V = 0,35$ beträgt der Längeneinfluss noch 4,0 %.

Die Gleichung (8) gilt voraussetzungsgemäß grundsätzlich für zwei parallele Zylinder gleicher Länge l . Sie kann aber auch für ungleich lange Zylinder verwendet werden, wenn der Elastizitätsmodul des längeren Kontaktpartners im Vergleich zum kürzeren überaus hoch ist. Die maßgebende Länge l in (8) ist dann jene des kürzeren Zylinders.

Die Untersuchung wurde aus praktischen Gründen anhand der Werkstoffkombination Kunststoff/Stahl geführt. Beziehung (8) kann gleichwohl unter Verwendung des Vergleichs-Elastizitätsmoduls (2) und der Vergleichs-Poissonzahl (4) auf beliebige Werkstoffkombinationen angewendet werden. Einzige Bedingung ist, dass sich die beiden Kontakt-Werkstoffe hinreichend linear-elastisch bzw. linear-viskoelastisch verhalten.

Das Resultat (8) schließt nahtlos an Beziehung (1) an und erweitert diese um den Einfluss des Verhältnisses l/R_V und der Vergleichs-Poissonzahl μ_V . Quantitativ hat sich mit dem Zahlenfaktor 5,2 im Vergleich zu 5,7 von (3) ein fast 9 % kleinerer Wert ergeben. Dieser liegt aber noch innerhalb der Standardabweichung von 0,78 \pm 13,7 % der früheren Untersuchung [8]. Eine Erklärung für diese Differenz könnte in der Tatsache liegen, dass die heute verfügbaren Rechnerleistungen eine weit engere FEM-Vernetzung und damit eine höhere Ergebnisgenauigkeit zulassen als damals. Die Ergebnisse für die verschiedenen Krümmungsverhältnisse (Bild 4) und den unterschiedlichen Größen der Radien sind aber auch nicht ganz deckungsgleich, ohne dass sich eine Systematik hätte erkennen lassen. Allfällig darin verborgene Signifikanzen aufzuspüren, wäre eine Aufgabe künftiger Untersuchungen.

6 Schlussbetrachtung

Mit der hier präsentierten, anhand theoretischer und FEM-numerischer Analysen entwickelten Beziehung (8) werden die Einflüsse des Verhältnisses von Vergleichsradius zu Zylinderlänge und des Querkontraktionsverhaltens der Werkstoffe auf die Abplattung paralleler Zylinder erfasst. Diese Einflüsse beruhen auf der Versteifung durch den dreiachsigen Spannungszustand, dessen Anteil mit zunehmender Zylinderlänge wächst. Im Experiment werden diese Erkenntnisse grundsätzlich bestätigt. Die Größe des empirisch ermittelten Zahlenfaktors $C \approx 5,2$ ist methodenbedingt mit einer gewissen Unschärfe behaftet. Zudem ist zu bedenken, dass sich mit realen Körpern die Hertzsche Voraussetzung des unendlichen Halbraums nicht wirklich erfüllen lässt. Dennoch dürfte der formelmäßig dargestellte Zusammenhang (8) eine nützliche Erweiterung bisheriger Erkenntnisse darstellen.

Auch wenn die Auslegung von Bauteilen in der Praxis kaum mehr aufgrund analytischer Berechnungen allein erfolgt, haben solche Berechnungsformeln trotz zunehmender Anwendung strukturmechanischer Simulationen nichts von ihrem Wert eingebüßt. Sie können vor allem in der Entwurfsphase einer Bauteilentwicklung sehr dienlich sein, da mit ihnen rasch ein zumindest in der Größenordnung brauchbares Resultat erhalten werden kann. Sie erlauben auch die Durchführung von Variantenstudien durch Parametervariation z. B. mittels Tabellenkalkulation, wogegen entsprechende FEM-Analysen doch vergleichsweise zeitaufwändig wären. Nicht zuletzt liegt der große Nutzen solcher Berechnungsformeln darin, dass sie die physikalischen Zusammenhänge zwischen den maßgeblichen Einflussgrößen aufzeigen und so ein vertieftes Verständnis der Problemstellung und ihrer Lösung ermöglichen.

Danksagung: Die vorliegende Arbeit wurde durch den Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil gefördert.

Für die Unterstützung bei den FEM-Analysen und den Experimenten danken die Verfasser Thomas Horlacher, Dipl.-Ing. FH (SITEC/HSR), Cornelia Steffen, MSc FHO in Engineering (IWK), und Dipl.-Ing. FH Dominik Stapf (IWK).

Literatur

- [1] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. J. reine u. ang. Math. 92(1881), S. 156–171
- [2] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes 61(1882), S. 449–463
- [3] Grote, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer Verlag Berlin, 24. Aufl., 2014
- [4] Czichos, H., Hennecke, M. (Hrsg.): Hütte – Das Ingenieurwissen. Springer Verlag Berlin, 34. Aufl., 2012
- [5] Vidéky, E.: Beiträge zur Berechnung der Zahnräder. Z. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 60(1908), S. 579–585
- [6] Schmidt, H.: Rollen aus Hostaform. Verformungsverhalten und Versagenskriterien. Konstruktion 25(1973), 6 S. 211–219
- [7] Steiner, K.: Untersuchungen über die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder. Diplomarbeit. Hochschule für Technik Rapperswil, 1978
- [8] Kunz, J., De María, E.: Die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder. Forschung im Ingenieurwesen 67(2002)4, S. 146–156
- [9] Popov, V.: Kontaktmechanik und Reibung. 2. Aufl., Springer Verlag Heidelberg, 2010, S. 20 und 65
- [10] Wikipedia: Kontaktmechanik. Aufgerufen am 25.3.2017
- [11] Kunz, J.: Kontaktmechanik zylindrischer Kunststoff-Laufmantelrollen. Kunststoffe-Synthetics 52(2005)6, S. 16–22
- [12] Kunz, J., Studer, M.: Zylindrische Laufmantelrolle mit partieller Abstützung. Kunststoffe-Synthetics 53(2006)1, S. 18–21
- [13] Kunz, J., Studer, M.: Neuartige 2K-Laufrollen und ihre Kontaktmechanik. SwissPlastics 30(2008)3, S. 17–20
- [14] Kunz, J., Gschwend, F.: Verkanten zylindrischer K-Laufmantelrollen. KunststoffXtra 1(2011)12, S. 63–66
- [15] Kunz, J., Peter, M.: Profil zylindrischer Kunststoffrollen optimieren. KunststoffXtra 2(2012)5, S. 25–28
- [16] Kunz, J.: Kontaktprobleme und ihre praktische Lösung. Konstruktion 61(2009)11/12, S. 54–58
- [17] Schlecht, B.: Maschinenelemente 1. Pearson Studium München, 2007, S. 107