

Konstruktion

Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe

Fachaufsatz Festigkeitslehre

Bei diesem Beitrag handelt es sich um einen wissenschaftlich begutachteten und freigegebenen (peer reviewed) Fachaufsatz.

J. Kunz

Festigkeitsbedingung bei schwingender Belastung mit Kerbwirkung

Strength Conditions at Oscillating Load with Notch Effect

Inhalt: Die Erfassung der Kerbwirkung bei der Auslegung von Bauteilen unter schwingender Belastung wird kritisch betrachtet, und zwar hinsichtlich der unterschiedlichen Bedeutung von Formzahl und Kerbwirkungszahl. Während die Formzahl für die im Kerbquerschnitt auftretende Spannungsüberhöhung maßgebend ist, bemisst die Kerbwirkungszahl die Reduktion der Schwingfestigkeitsamplitude infolge Kerbwirkung. Mit den gewonnenen Erkenntnissen werden die Festigkeitsbedingungen so formuliert, dass sie mit den Gesetzen der Mechanik im Einklang sind.

Abstract: *Determination of notch effect when dimensioning structural elements under oscillating loads is critically discussed in view of the differing significance of stress concentration factor vs. fatigue notch factor. While the stress concentration factor is decisive for the excessive stress in the notched cross section, the fatigue notch factor measures the reduction of fatigue strength amplitude due to notch effect. With the findings obtained, strength conditions are reformulated to be in line with the laws of mechanics.*

1 Einleitung

Die Auslegung von Bauteilen, die schwingend belastet werden, ist eine vielschichtige Aufgabe. Sie beinhaltet zur Hauptsache die Charakterisierung von Art und Größen der Belastungsschwingung, das Lokalisieren versagenskritischer Stellen, das Festlegen der relevanten Versagenskriterien, die Einschätzung der Umgebungs- und Betriebsbedingungen, die Beurteilung

und quantitative Konkretisierung des zu erwartenden Werkstoffverhaltens und der darauf einwirkenden Einflussgrößen, Überlegungen zu Sicherheit und Lebensdauer, sowie nicht zuletzt die Wahl eines geeigneten Auslegungskonzeptes.

Als potentielle Bauteil-Schwachstellen erweisen sich häufig ausgeprägte Unstetigkeiten im Querschnittsverlauf. Dies verlangt eine entsprechend sorgfältige Auseinandersetzung mit ihrem Einfluss auf Spannungsverteilung und Werkstoffverhalten, subsumiert unter dem Begriff Kerbwirkung.

2 Rechnerischer Festigkeitsnachweis

Für den rechnerischen Nachweis der Dauer- oder Betriebsfestigkeit von Bauteilen haben sich unterschiedliche Vorgehensweisen etabliert [1–3], z. B. nach der FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinen-

bauteile“ [4] oder nach der für Wellen und Achsen aus Stahl geltenden DIN 743 [5]. Das sog. Nennspannungskonzept geht von den Nennspannungen aus, die im versagenskritischen Querschnitt herrschen. Spannungskonzentrationen an Querschnittsprüngen wie Kerben werden dabei dadurch berücksichtigt, dass zulässige Nennspannungen anhand einfacher Kerbstäbe vergleichbarer Kerbgeometrie ermittelt werden. Im Gegensatz dazu werden nach dem sog. örtlichen Konzept oder Kerbspannungskonzept die im Kerbgrund auftretenden Spannungen betrachtet, wie sie etwa aus einer linear-elastischen Finite-Element-Analyse hervorgehen, und die mit den zugehörigen Nennspannungen über die Formzahl α_K zusammenhängen [6]. Alternativ zum Nachweis mittels Spannungen kann ein solcher auch über die Dehnungen erfolgen, was speziell bei Auftreten plastischer Verformungsanteile zweckmäßig ist.

Autor

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz
Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK)
HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Oberseestraße 10
8640 Rapperswil/CH
E-Mail: jkunz@hsr.ch
www.iwk.hsr.ch

Bekanntlich ist diese Formzahl α_K – wie der Name sagt – bei linear-elastischem Materialverhalten nur von Formparametern wie Geometrie und Größe von Bauteil und Kerbe sowie der Beanspruchungsart (Zug/Druck, Biegung, Torsion) abhängig, nicht aber vom Werkstoff.

Zur Bestimmung der maximalen Spannungsamplitude $\sigma_{a,max}$ im Kerbgrund als schwingender bzw. präziser als wechselnder Belastungsanteil wird auch etwa argumentiert, dass sich die Kerbgeometrie auf die maximale Spannungsamplitude nicht im selben Maße auswirke wie es die Spannungsüberhöhung mit der Formzahl α_K vermuten lasse, sondern nur mit der Kerbwirkungszahl β_K . Somit gelte für die „effektive“ Spannungsspitze $\sigma_{a,max} = \beta_K \cdot \sigma_{a,n}$ [7, 9]. Diese Aussage verdient eine genauere Betrachtung.

Die Kerbwirkungszahl

$$\beta_K = \frac{\sigma_A}{\sigma_{AK}} \quad (4)$$

ist per Definition das Verhältnis der Schwingfestigkeitsamplituden σ_A des ungekerbten und σ_{AK} des gekerbten Bauteils gleicher Querschnittsabmessungen, gemessen unter sonst gleichen Bedingungen (Bild 3). Dabei ist zu beachten, dass es sich bei σ_{AK} um einen Nennspannungswert im Kerbquerschnitt handelt.

Die Kerbwirkungszahl ist somit eine aus dem Dauerschwingversuch hervorgehende Werkstoffkenngröße (Bild 4), die zwar einerseits von der Bauteil- und

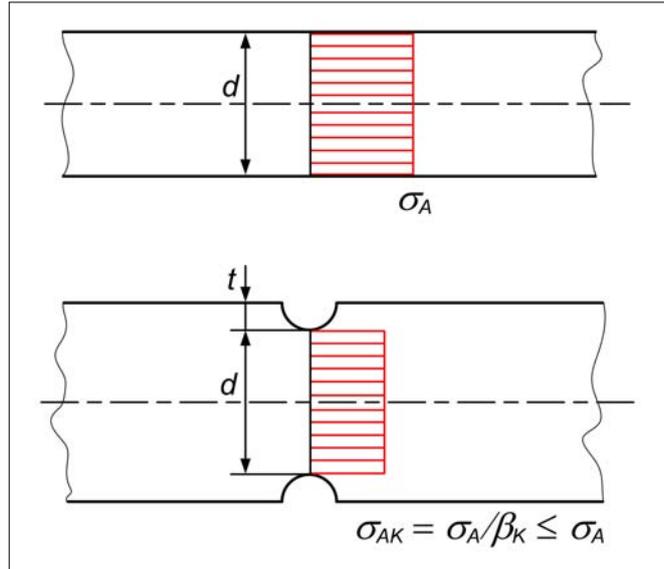


Bild 3

Vergleichbare Probekörper zur Ermittlung der Schwingfestigkeitsamplituden σ_A und σ_{AK} (Nennspannungen) ohne bzw. mit Kerbwirkung (schematisch)

Kerbgeometrie abhängt, andererseits aber maßgeblich von der Kerbempfindlichkeit des Werkstoffs bestimmt wird, und durch die Relation

$$1 \leq \beta_K \leq \alpha_K \quad (5)$$

gegenüber der Formzahl α_K abgegrenzt wird. Die untere Grenze repräsentiert ideal kerbunempfindliches Werkstoffverhalten, die obere Grenze dagegen extrem kerbempfindliches Verhalten, wie es vor allem bei spröden Werkstoffen beobachtet wird. Der Unterschied zwischen der Kerbwirkungszahl und der Formzahl wird umso größer, je kleiner der Kerbgrundradius ist. Die Kerbwirkungszahl β_K ist also kein Maß für die Überhöhung der Nenn-

spannungsamplitude σ_m im Kerbgrund. Sie hat vielmehr den Charakter eines Einflussfaktors auf die Schwingfestigkeitsamplitude und ist konsequenterweise in den Faktor C der Festigkeitsbedingungen (1) und (2) einzuzurechnen.

Dass die Kerbwirkungszahl β_K kein Maß für die Spannungsüberhöhung der Schwingungsamplitude darstellen kann, zeigt sich auch bei der Bestimmung der Spannungsverteilung in einem Kerbquerschnitt mittels der Finite Elemente Methode (FEM). Die linear-elastische FEM-Analyse liefert bei hinreichend guter Modellbildung Spannungsspitzen in einer Höhe, die der mit der Formzahl α_K überhöhten Nennspannung entsprechen, und dies unabhängig davon, ob es sich um die Mittelspannung σ_m , die Spannungsamplitude σ_a , die Ober- oder die Unterspannung σ_u handelt. Allfällige Effekte der plastischen Verformung im Kerbgrund mit entsprechender Abweichung vom linear-elastischen Verhalten ändern an dieser Tatsache nichts und sind in diesem Zusammenhang auch nicht Gegenstand der Diskussion.

Die Spannungsverteilung in einem Bauteilquerschnitt hat in ihrer Gesamtheit stets der im Querschnitt auftretenden Beanspruchung zu entsprechen, also den Äquivalenzbeziehungen zwischen Spannungsverteilung und Beanspruchung zu genügen (Bild 2). Diese lautet im einfachen Fall einer Beanspruchung durch eine Normalkraft F_n

$$F_n = \int_A \sigma(z) \cdot dA \quad (6)$$

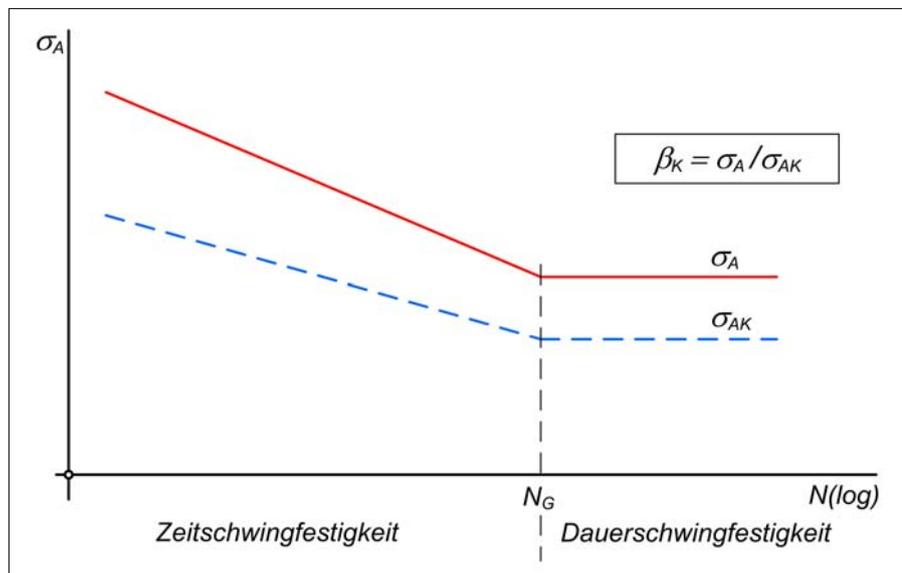


Bild 4

Wöhlerdiagramm mit Zeit- und Dauerschwingfestigkeitskurven für ungekerbte und vergleichbare gekerbte Prüfkörper (schematisch) und Definition der Kerbwirkungszahl β_K

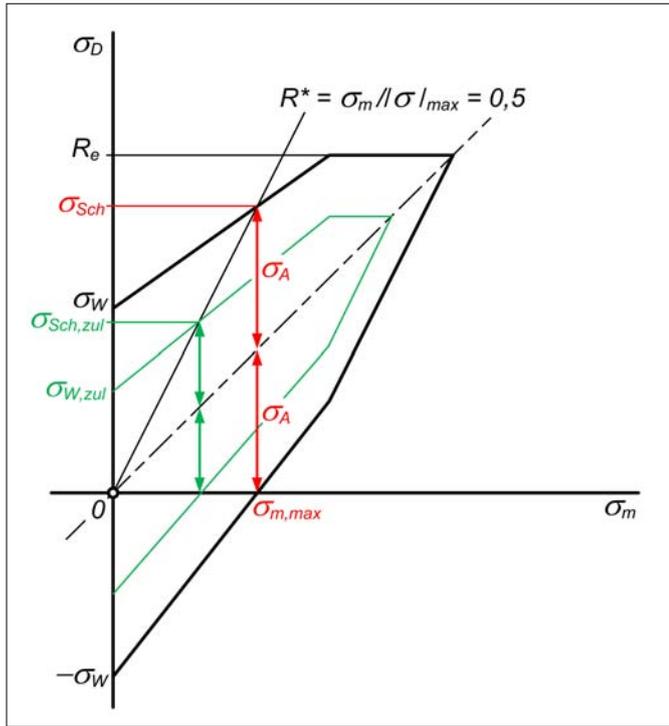


Bild 5
Schwellende Belastung im Schwingfestigkeitsdiagramm nach Smith: Reduktion vom Grenzfalle σ_{Sch} auf die zulässige Höhe $\sigma_{Sch,zul}$

4 Festigkeitsbedingungen

Auf Basis der obigen Erkenntnisse lassen sich die Festigkeitsbedingungen (1) und (2) so ausformulieren, dass sie mit den Gesetzen der Mechanik und den Gepflogenheiten der Festigkeitslehre im Einklang sind.

Bedingung (1) stellt sich unter Anwendung von (3), (6) und (7) nun in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma_{m,max} + \sigma_{a,max} = \\ &= \alpha_K \cdot (\sigma_{m,n} + \sigma_{a,n}) \leq \sigma_{zul} = \sigma_G \cdot \frac{C_G}{S_G} \end{aligned} \quad (8)$$

dar. Die berechnete Maximalspannung ist damit wegen (5) leicht höher als bei der unzutreffenden „Überhöhung“ der Nennspannungsamplitude $\sigma_{a,n}$ mit der Kerbwirkungszahl β_K .

Und Bedingung (2) kann mit (3) und (4) entwickelt werden zu

$$\begin{aligned} \sigma_{a,max} &= \alpha_K \cdot \sigma_{a,n} \leq \sigma_{a,zul} = \\ &= \alpha_K \cdot \sigma_{AK}(\sigma_{m,max}) \cdot \frac{C_D}{S_D} = \\ &= \sigma_A(\sigma_{m,max}) \cdot \frac{\alpha_K \cdot C_D}{\beta_K \cdot S_D} \end{aligned} \quad (9)$$

In (8) und (9) repräsentieren C_G bzw. C_D den jeweils relevanten resultierenden Einflussfaktor. Dieser ist zumeist definiert als Produkt

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n = \prod_{i=1}^n C_i \quad (10)$$

aus allen Einzel-Einflussfaktoren C_i für

Für die Beanspruchung durch ein Biege- oder ein Torsionsmoment gelten entsprechende Ausdrücke. Wäre β_K ein Maß für die Spannungsüberhöhung im Kerbquerschnitt, dann müsste wegen $\beta_K \leq \alpha_K$ eine Spannungsumlagerung im gesamten Querschnitt erfolgen, um die Beziehung (6) generell zu erfüllen. Für die Annahme einer solchen Umlagerung gibt es aber bei linear-elastischem Werkstoffverhalten keine plausible Erklärung. Daraus folgt mit (5), dass dem Integral (6) nur bei $\beta_K = \alpha_K$ nicht widersprochen würde, im Regelfall $\beta_K < \alpha_K$ aber die Gesetze der Mechanik verletzt werden.

Bei schwellender Belastung sind definitionsgemäß Mittelspannung und Spannungsamplitude gleich groß (Bild 5). Es ergibt sich das Spannungsverhältnis $R^* = \sigma_m / |\sigma_{max}| = 0,5$, das sich im Schwingfestigkeitsdiagramm (Bild 1) als Gerade mit Steigung $1/R^* = 2,0$ durch den Nullpunkt abbildet. Würde die Mittelspannung σ_m infolge Kerbe mit α_K die Spannungsamplitude σ_m aber nur mit β_K überhöht, ergäbe sich aus (1) wegen (5) als Unterspannung $\sigma_u = \alpha_K \cdot \sigma_{m,n} - \beta_K \cdot \sigma_{a,n} \geq 0$, also ein Wert, der nicht auf null zurückgehen würde, obwohl am Bauteil keine Kraft wirkt. Dieses absurde Resultat macht definitiv klar, dass die Spannungsamplitude im Kerbgrund ein Maximum aufweist, das mit der Formzahl α_K und nicht mit der Kerbwirkungszahl β_K gegenüber der Nennspannungsamplitude überhöht ist.

All diese Überlegungen zeigen, dass

den beiden Zahlen α_K und β_K eine ganz unterschiedliche Bedeutung zukommt: Die Formzahl α_K ist das Maß für die Spannungsüberhöhung im Kerbgrund, so dass gilt

$$\sigma_{a,max} = \alpha_K \cdot \sigma_{a,n} \quad (7)$$

Die Kerbwirkungszahl β_K bleibt der Einflussfaktor, als der sie gemäß Definition (4) die Auswirkung einer Kerbgeometrie auf die Schwingfestigkeitsamplitude σ_A quantifiziert.

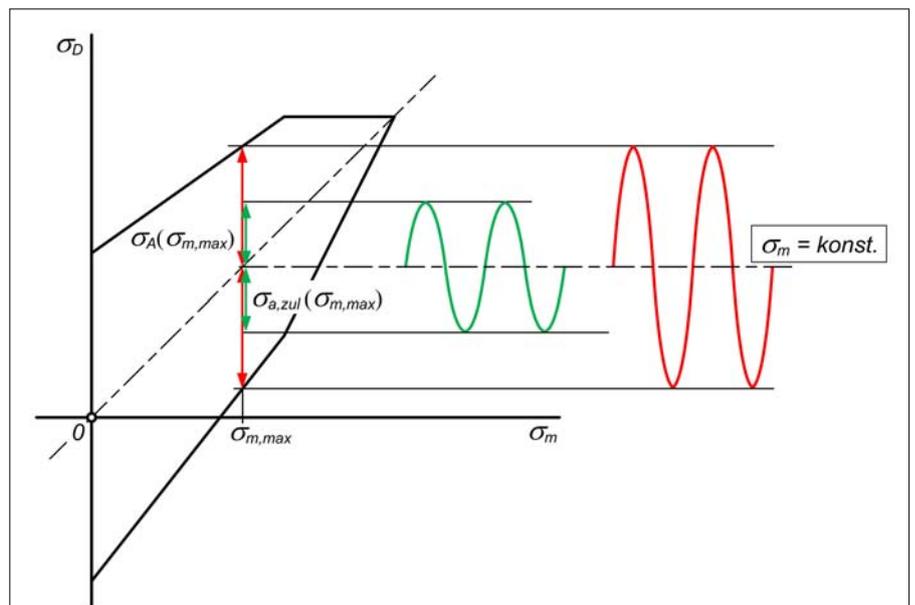


Bild 6
Bestimmung der ertragbaren und der zulässigen Spannungsamplitude im Schwingfestigkeitsdiagramm bei vorgegebener Mittelspannung σ_m

die verschiedensten Einwirkungen, welche den Spannungs-Grenzwert σ_G bzw. die Schwingfestigkeitsamplitude σ_A bzw. σ_{AK} des Werkstoffs gegenüber dem an der an der Normprobe gemessenen Wert herabsetzen, also die Einflüsse von Beanspruchungsart, Temperatur, Oberflächenbeschaffenheit, Wärmebehandlung, Gefügezustand, Eigenspannungen, Bauteilgröße, Querschnittsform usw. Für die Bezifferung dieser Einflussfaktoren, die in umfangreichen Versuchen empirisch ermittelt werden, kann der Anwender auf die einschlägige Literatur (z. B. [1, 2, 5-Teil 2]) zurückgreifen.

Wenn etwa postuliert wird, dass bei ausreichender plastischer Verformbarkeit ein Erreichen oder Überschreiten der Streckgrenze im Kerbgrund unbedenklich sei, da keine Anrissgefahr bestehe [5-Teil1], würde dies bedeuten, dass mit Bedingung (8) keine rechnerische Sicherheit mehr belegt werden könnte. Eine solche Aussage ist problematisch und darf keinesfalls verallgemeinert werden. Anstelle von (8) müsste dann eine Bedingung gesetzt werden, die den tatsächlichen werkstofflichen Gegebenheiten hinreichend verlässlich Rechnung trägt.

5 Anwendung

Bei der praktischen Anwendung der Bedingungen (8) und (9) stehen – entsprechend der unterschiedlichen Gegebenheiten der äußeren Belastung – zwei Fälle im Vordergrund, wie sie auch in DIN 743-1 beschrieben sind [5-Teil1].

Ist die Belastungsschwingung durch eine vorgegebene Mittellast F_m und eine variierebare Lastamplitude F_a charakterisiert, z. B. bei Bauteilen mit Vorspannung, so lässt sich mit (3) der Spitzenwert $\sigma_{m,max}$ der Mittelspannung berechnen. Deren Differenz zu σ_{zul} aus Bedingung (8) begrenzt den Höchstwert $\sigma_{a,max}$ der Spannungsamplitude nach (7), um unzulässige Verformungen oder Gewaltbruch auszuschließen. Die andere Grenze für $\sigma_{a,max}$ zur Vermeidung eines Dauerschwingversagens ist mit Bedingung (9) durch die zulässige Spannungsamplitude $\sigma_{a,zul}$ gegeben, indirekt also unter Einrechnung von Einflüssen und Sicherheit durch die von $\sigma_{m,max}$ abhängige ertragbare Spannungsamplitude $\sigma_A(\sigma_{m,max})$ (Bild 6).

Im zweiten Fall ist das Verhältnis der Mittellast zur Maximallast als konstant vorgegeben. Somit liegt – unabhängig

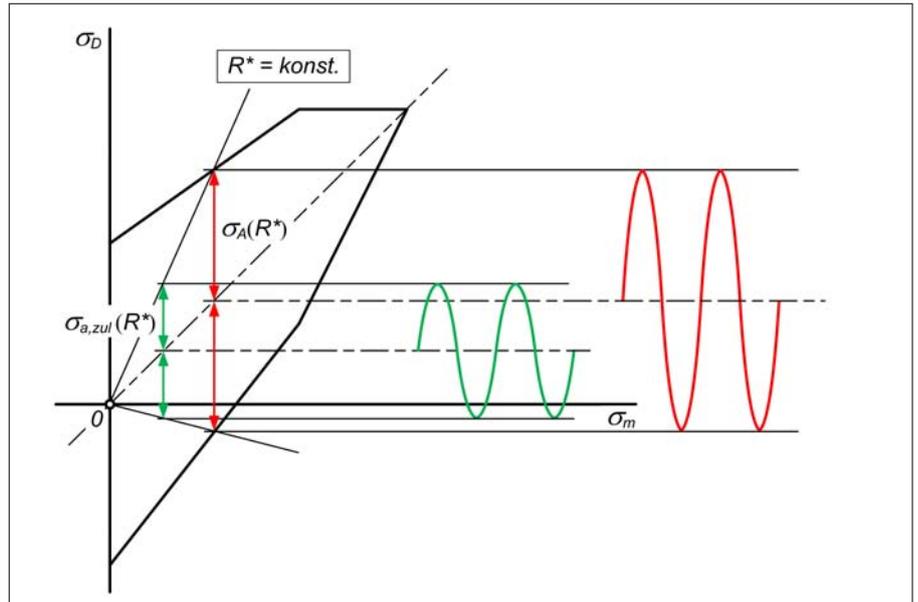


Bild 7

Bestimmung der ertragbaren und der zulässigen Spannungsamplitude im Schwingfestigkeitsdiagramm bei vorgegebenem Spannungsverhältnis R^*

von der Lasthöhe – als Zusatzbedingung auch ein konstantes Spannungsverhältnis $R^* = \sigma_{m,max}/|\sigma|_{max}$ vor. Die zugehörige Gerade der Steigung $1/R^*$ im Schwingfestigkeitsdiagramm bestimmt mit dem Schnittpunkt der oberen Schwingfestigkeitslinie (Bild 7) die maßgebende ertragbare Spannungsamplitude $\sigma_A(R^*)$ für die Bedingung (9) und begrenzt mit dieser zugleich auch den im Kerbgrund auftretenden Höchstwert der Spannungsamplitude $\sigma_{a,max}$. Daraus ergibt sich aber auch die resultierende Maximalspannung $\sigma_{max} = \sigma_{m,max} + \sigma_{a,max} = R^* \cdot \sigma_{m,max}$ für Bedingung (8). Zu den so zu behandelnden Fällen zählt mit $R^* = 0,5$ insbesondere auch die schwelende Belastung.

6 Kerbempfindlichkeit

Der in (9) auftretende Quotient α_K/β_K kann als ein Maß für die von der Kerbgeometrie abhängige Kerbempfindlichkeit des Werkstoffs und damit als ein Einflussfaktor verstanden werden, der sich je nach Ansatz für die Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_K auch direkt in (10) einrechnen lässt. So ist bei der Definition nach Petersen [10] etwa

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = \frac{1 + \sqrt{\rho^* \cdot \chi^*}}{1 + \sqrt{\rho^* \cdot \chi_0^*}} \quad (11)$$

worin rechterhand weder die Formzahl α_K noch die Kerbwirkungszahl β_K auftauchen. Die Größe ρ^* ist der Radius

einer virtuellen, als Bohrung gedachten werkstoffeigenen „Ersatzkerbe“, mit der die Kerbempfindlichkeit des Werkstoffs erfasst wird; $\chi^* = (1/\sigma_{max}) \cdot (d\sigma/dz)_{max}$ steht für das geometriebedingte spezifische Spannungsgefälle im Kerbgrund (Bild 2), und χ_0^* für jenes, das aus der Art der Beanspruchung resultiert, z. B. bei Biegung oder Torsion.

Analog ergibt sich mit Verwendung der Stützziffer n_χ nach Siebel et al. [11] zur Erfassung der sog. „dynamischen Stützwirkung“ der zu (11) ähnliche Ausdruck

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = n_\chi = \frac{1 + \sqrt{s_g \cdot \chi^*}}{1 + \sqrt{s_g \cdot \chi_0^*}} \quad (12)$$

mit s_g als einer für den Dauerschwingbruch verantwortlichen „Gleichschichtbreite“.

Bei Verwendung der Kerbwirkungszahl η_K nach der Definition von Thum [12] wird das Verhältnis

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = \frac{\alpha_K}{1 + \eta_K \cdot (\alpha_K - 1)} \quad (13)$$

welches rechts des Gleichheitszeichens sowohl die Formzahl α_K als auch die Kerbempfindlichkeitszahl η_K enthält. Allerdings hat sich diese Thum'sche Kerbempfindlichkeitszahl nicht als reine Werkstoffkennzahl erwiesen, da sie von der Kerbgeometrie nicht ganz unabhängig ist. Dennoch kann der Quotient α_K/β_K in Bedingung (9) auch aus dieser Sicht als Maß für die Kerbempfindlichkeit des Werkstoffs gelten, zu-

mindest in guter Näherung. Ähnliche Überlegungen können bei den weiteren bekannt gewordenen Ansätzen zur Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_K oder zur Erfassung der Kerbempfindlichkeit angestellt werden.

7 Fazit

Mit der klaren Unterscheidung von Formzahl α_K und Kerbwirkungszahl β_K und deren konsequenter Verwendung entsprechend ihrer eigentlichen Bedeutung bei Bauteilen mit technischen Kerben können Missverständnisse und

Fehldeutungen vermieden und damit die Verlässlichkeit der Bauteilauslegung erhöht werden. Die Kerbwirkungszahl β_K hat den Charakter eines Einflussfaktors, der aussagt, um welchen Anteil die Schwingfestigkeitsamplitude σ_A infolge Kerbeinfluss reduziert wird. Sie ist aber kein Maß für die Überhöhung der Spannungsamplitude im Kerbgrund, denn auch diese Spannungsüberhöhung wird korrekterweise mit der Formzahl α_K erfasst.

Die auf dieser Grundlage formulierten Festigkeitsbedingungen (8) und (9) für schwingend beanspruchte Bauteile

mit Kerbwirkung sind in sich widerspruchsfrei, und sie stehen auch im Einklang mit den Gesetzen der Mechanik, den Regeln der Festigkeitslehre und den Erkenntnissen der Werkstoffmechanik. Dass die Spannungskonzentration bei örtlicher plastischer Verformung im Kerbgrund durch den Abbau von Spannungsspitzen vermindert wird, die Spannungsüberhöhung also streng genommen nur bei linear-elastischem Werkstoffverhalten mit der Formzahl α_K erfasst wird, ändert grundsätzlich nichts an dieser Aussage.

Literatur

- [1] Zammert, W.-U.: Betriebsfestigkeitsrechnung. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985
- [2] Haibach, E.: Betriebsfestigkeit. Springer-Verlag Berlin, 3. Aufl., 2006
- [3] Grothe, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer Verlag Berlin, 23. Aufl., 2011
- [4] FKM-Richtlinie: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), VDMA-Verlag Frankfurt/Main, 6. Aufl., 2012

- [5] DIN 743:2012: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen, Teile 1 – 4 sowie Beiblätter 1 und 2. Deutsches Institut für Normung e. V. Berlin, 2012
- [6] Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Springer-Verlag Berlin, 4. Aufl., 2001
- [7] Wellinger, K.; Dietmann, H.: Festigkeitsberechnung. Alfred Kröner Verlag Stuttgart, 3. Aufl., 1976
- [8] Dietmann, H.: Festigkeitsberechnung bei mehrachsiger Schwingbeanspruchung. Konstruktion 25(1973)5, S. 181–189
- [9] Issler, L.; Ruoss, H.; Häfele, P.: Festigkeitslehre –

- Grundlagen. Springer-Verlag Berlin, 2. Aufl., 2003
- [10] Petersen, C.: Die Vorgänge im zügig und wechselnd beanspruchten Metallgefüge. Teile 3 und 4. Z. Metallkunde 42(1951), S. 161–170; 43(1952), S. 429–433
- [11] Siebel, E.; Bussmann, K. H.: Das Kerbproblem bei schwingender Beanspruchung. Technik 3(1948), S. 249–252
- [12] Thum, A.; Buchmann, W.: Dauerfestigkeit und Konstruktion. VDI-Verlag Berlin, 1932

Danksagung: Der Verfasser dankt seinem Kollegen Prof. Dr. sc. techn. Markus Henne vom IWK für kritisch-anregende Diskussion des Themas.

Wir bringen unsere Fachkompetenzen als professionelle Partner der Industrie kundenspezifisch und bedürfnisorientiert in Ihre Projekte ein, sei es in Form von Beratungen, Studien, Entwürfen, Konstruktions-, Berechnungs-, Prüfaufträgen oder experimentellen Untersuchungen in unseren Labors.

DAS BINDEGLIED ZWISCHEN WISSENSCHAFT UND INDUSTRIE