

› Berechnung von Kunststoffkonstruktionen

Bauteilauslegung bei schlagartiger Belastung

Viele Bauteile sind schlagartigen Belastungen ausgesetzt (Bild 1) und müssen dementsprechend ausgelegt werden. In den verbreiteten Fachbüchern findet sich zu diesem Thema leider wenig bis gar nichts. Hier wird, beruhend auf wissenschaftlichen Erkenntnissen und verfügbaren Werkstoffkennwerten, ein einfacher Weg für den Berechnungsalltag aufgezeigt.

› Johannes Kunz¹

Die rechnerische Auslegung von Kunststoffbauteilen, die – funktionsbedingt oder ungewollt – schlag- oder stossartigen Belastungen ausgesetzt sind, ist in der Konstruktionspraxis noch wenig verbreitet. Ein Hauptgrund dafür dürfte in der Unsicherheit über die werkstoffmechanischen Phänomene einschliesslich der relevanten Werkstoffkennwerte und deren rechnerische Erfassung zu sehen sein. Zwar sind vor rund drei Jahrzehnten wesentliche Grundlagen hierzu erarbeitet und publiziert worden [1-3], auf die auch immer wieder verwiesen wird [4]. Ihre Anwendung erfordert jedoch die Kenntnis der massgebenden Kennwerte. Da solche aber nur für ganz wenige Werkstofftypen vorliegen, ist ein relativ einfacher Berechnungsansatz wünschbar, der mit den üblicherweise verfügbaren Kennwerten aus Datenbanken [5, 6] auskommt und brauchbare Resultate liefert.

Werkstoffmechanische Erkenntnisse

Schlag- oder stossartig ist eine Belastung, wenn sie in sehr kurzer Zeit aufgebracht und dabei die kinetische Schlagenergie in Verformungsarbeit umgesetzt wird. Solchen Situationen sind viele Kunststoffteile ausgesetzt, vor allem auch Gehäuse. Die Kunststoffe reagieren auf eine schlagartige Belastung praktisch wie bei tieferen Tem-

peraturen, nämlich durch einen starken Anstieg von Steifigkeit und Festigkeit bei gleichzeitiger Abnahme der Verformbarkeit (Bild 2). Die dabei auftretenden Verformungen sind vorwiegend energieelastischer Natur, da der Einfluss der Entropieelastizität mehr und mehr verschwindet. Die Verformungscharakteristik wird praktisch linearelastisch, und es ergibt sich ein ausgeprägtes Spröbruchverhalten, ohne dass eine nennenswerte bleibende Verformung oder eine sichtbare Schädigung vorausginge. Das Bruchbild zeigt dann entweder einen glatten Trennbruch oder einen glasartigen Splitterbruch [4].

Während die Bruchspannung stetig zunimmt, zeigt die Bruchdehnung ein komplexeres Verhalten. Bei PMMA-HM beispielsweise steigt sie unter kleineren Dehngeschwindigkeiten zunächst an, erreicht bei $\dot{\epsilon} = 100\%/h$ ein Maximum und nimmt dann bei höheren Dehngeschwindigkeiten ab bis zu einem konstanten Wert von ca. 2,2% (Bild 3). Generell kann festgestellt werden, dass die Bruchdehnungen unter schlagartiger Belastung bei vielen Kunststoffen, vorab bei amorphen Thermoplasten, um oder knapp oberhalb von 2% liegen [4].

Werkstoffe für Bauteile, die schlagartigen Belastungen ausgesetzt sind, müssen eine ausreichende Zähigkeit aufweisen, d.h. ein bestimmtes minimales Arbeitsaufnahmevermögen, ohne dass die Konstruktion bzw. der Werkstoff beschädigt wird. Die genormten Charpy-Schlagzähigkeitsprüfungen sind für die Beurteilung dieses Arbeitsaufnahmevermögens ebenso wenig geeignet wie bruchmechanische Konzepte, da deren Messwerte die Energie für die bleibenden Verformungen und die Zerstörung der Probe mit enthalten. Aus diesem Grund sind seinerzeit in wissenschaftlichen Unter-

suchungen geeignete Messverfahren entwickelt und massgebende Kennwerte erarbeitet worden [1, 2].

Als aussagekräftige Grösse hat sich die Formänderungsenergie pro Volumeneinheit. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht sie der Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Kurve. Im Bereich, der für die schlagartige Belastung relevant ist, also oberhalb von etwa 104%/h, nimmt sie – entsprechend den oben beschriebenen Abhängigkeiten von Bruchspannung und Bruchdehnung – zunächst ab, erreicht dann bei ϵ_{Bmin} ein Minimum (Bild 4) und wächst anschliessend bei steigender Bruchspannung, aber gleichbleibender Bruchdehnung wieder [1]. Dieses Minimum w_{min} ist für die Auslegungspraxis als Beanspruchungsgrenzwert von Interesse. Doch leider lassen sich diese Zusammenhänge nur mit einem entsprechend grossen Prüfaufwand in Schnellzerreissversuchen quantifizieren. Die Erfahrung zeigt, dass die bis zum Versagen unter Schlagbelastung aufgenommenen volumenspezifische Formänderungsenergie bei Thermoplasten



Bild 1: Viele Bauteile – wie hier Kühlraumkomponenten aus PS mit erhöhter Schlagzähigkeit – müssen auch schlagartigen Belastungen standhalten und sind entsprechend auszulegen.

¹ Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im MAS-Studiengang Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz.

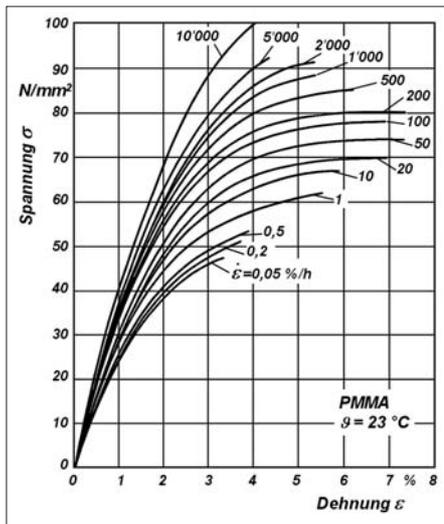


Bild 2: Spannungs-Dehnungs-Diagramm von PMMA in Funktion der Dehngeschwindigkeit (nach Menges et al. [3])

in der Regel eine minimale Grössenordnung von etwa 1,0 bis 2,5 Nmm/mm³ (≙ N/mm²) erreicht (Tabelle 1). Auch das Querkontraktionsverhalten, das für die Beschreibung mehrachsiger Spannungs- und Verformungszustände von Bedeutung ist, wird von der Dehngeschwindigkeit beeinflusst. Bei erhöhter Dehngeschwindigkeit nehmen die viskoelastischen Verformungsanteile ab, was sich in einer Abnahme der Poisson- oder Querkontraktionszahl äussert [7]. Diese Abnahme, die auch von der Dehnung und der Temperatur abhängt, liegt z. B. bei PMMA im Bereich von etwa 3 bis 4% (Bild 5). Bei anderen amorphen Thermoplasten haben sich ähnliche Grössenordnungen gezeigt.

Einfacher Berechnungsansatz

Der Berechnungsansatz für die Auslegung von Bauteilen bei schlagartiger Belastung beruht auf folgenden Erkenntnissen bzw. Überlegungen:

- Der Schlag erfolgt schädigungsfrei.
- Das Verformungsverhalten unter schlagartiger Belastung ist linear elastisch, es gilt das Hookesche Gesetz.
- Beim Schlag wird kinetische Schlagenergie in Formänderungsenergie im Bauteil umgesetzt.
- Der dämpfungsbedingte Energieverlust kann dabei vernachlässigt werden.
- Beim Schlag auftretende thermomechanische Effekte werden nicht berücksichtigt.

- Die pro Volumeneinheit versagensfrei aufnehmbare Formänderungsenergie ist begrenzt.

Damit kann vom Energieerhaltungssatz

$$E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2} = W = \int_V w \cdot dV = U \quad (1)$$

ausgegangen werden. Darin sind E_{kin} die kinetische Energie des Schlages, m die schlagverursachende Masse, v die Schlaggeschwindigkeit, W die Formänderungsarbeit, w die Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit (spezifische Formänderungsarbeit), V das Bauteilvolumen, dV das infinitesimale Volumenelement und U die Formänderungsenergie.

Die Arbeits- bzw. Energiebedingung

$$w_{max} \leq w_{zul} = w_G \cdot \frac{C}{S} = w_{min} \cdot \frac{C}{S} \quad (2)$$

verlangt, dass der im Bauteil auftretende Grösstwert w_{max} der spezifischen Formänderungsenergie einen zulässigen Wert w_{zul} nicht überschreitet. Dieser bestimmt sich aus dem Grenzwert w_G bzw. w_{min} der Formänderungsenergie (kurz Arbeits- bzw. Energiegrenzwert) des betreffenden Werkstoffs, einem allfälligen Einflussfaktor C zur Erfassung von darin noch nicht berücksichtigten Einwirkungen und dem Sicherheitsfaktor S .

Der Grösstwert w_{max} tritt an der höchstbeanspruchten Stelle im Bauteil auf. Im einachsigen Spannungszustand ist das zugleich die Stelle der grössten Spannung σ_{max} bzw. der zugehörigen Dehnung ϵ_{max} . Somit gilt mit dem einfachen Hookeschen Gesetz und dem Elastizitätsmodul E

$$w_{max} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{max} \cdot \epsilon_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{max}^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \epsilon_{max}^2 \quad (3)$$

Ist der Spannungszustand mehrachsig, so kann die Stelle mit w_{max} nicht mehr in allen Fällen präzise vorausbestimmt werden, da es nun auf die lokale Kombination der Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 und der entsprechenden Dehnungen ankommt gemäss der Beziehung

$$w = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \cdot \epsilon_1 + \sigma_2 \cdot \epsilon_2 + \sigma_3 \cdot \epsilon_3) \quad (4)$$

Diese Erweiterung von (3) auf den dreiachsigen Spannungszustand lässt sich mit dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz in Funktion der Hauptspannungen allein ausdrücken, was in der Form

$$w = \frac{1-2 \cdot \mu}{6 \cdot E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1+\mu}{6 \cdot E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (5)$$

oder als

$$w = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \quad (6)$$

darstellbar ist. In Funktion der Hauptdehnungen wird (4) zu

$$w = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \left[\frac{\mu}{1-2 \cdot \mu} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \right] \quad (7)$$

Massgebend für die Arbeitsbedingung (2) ist dann der mit einer dieser Formeln (3) bis (7) berechnete Höchstwert w_{max} im Bauteil.

Näherung für den Energiegrenzwert

Der Energiegrenzwert w_{min} in (2) entspricht der Fläche unter der Spannungs-Dehnungskurve bis zum Dehnungsgrenzwert ϵ_{Bmin} nach Bild 4. Zahlenwerte für w_{min} , ermittelt in Schnellzerreissversuchen, liegen nur für wenige, bestimmte Werkstofftypen und teilweise in unterschiedlicher Grösse vor (Tabelle 1). Die Berechnungspraxis ist aber auf einen möglichst einfachen und breit anwendbaren Ansatz angewiesen, bei dem

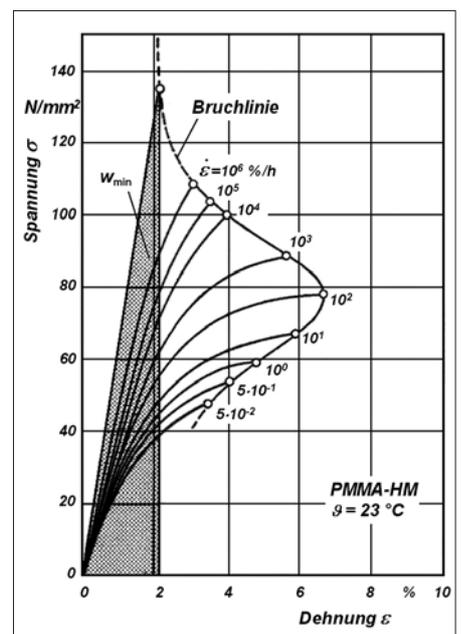


Bild 3: Minimale Formänderungsenergiegedichte w_{min} von PMMA-HM (nach Boden [1])

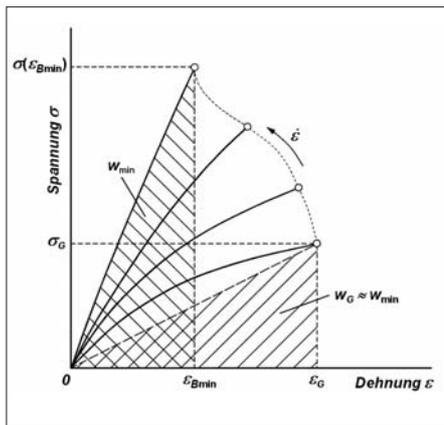


Bild 4: Arbeitsgrenzwert w_G aus Schnellzerreissversuchen und Näherung mit quasistatischen Spannungs- und Dehnungsgrenzwerten (schematisch)

nicht die Kriterien der Wissenschaftlichkeit im Vordergrund stehen, sondern die Praktikabilität. Wünschbar ist also eine Näherung, die mit standardmässig in Datenbanken [5, 6] verfügbaren Werkstoffkennwerten auskommt und ausreichend gute Resultate liefert. Es liegt nahe, für eine solche Approximation je nach dem relevanten Werkstoffverhalten die Kennwerte beim Versagen durch Verstreckung (Streckspannung, Streckdehnung) oder durch Bruch (Bruchspannung, Bruchdehnung) aus dem Kurzzeit-Zugversuch nach DIN EN ISO 527 beizuziehen. Damit gilt:

$$w_{min} = \int_0^{\epsilon_{Bmin}} \sigma \cdot d\epsilon = w_G \approx \frac{1}{2} \sigma_G \cdot \epsilon_G \quad (8)$$

Bei zähem Verhalten liefert dann Beziehung (8) mit der Streckspannung σ_s und der Streckdehnung ϵ_s die Näherung

$$w_G \approx \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot \epsilon_s \quad (9)$$

bzw. bei Bruchversagen mit der Bruchspannung σ_B und der Bruchdehnung ϵ_B

$$w_G \approx \frac{1}{2} \cdot \sigma_B \cdot \epsilon_B \quad (10)$$

Die damit erzielbaren Ergebnisse lassen sich leider nicht direkt mit den Werten aus der Literatur [1, 2] vergleichen, da die meisten der damals verwendeten Kunststofftypen nicht mehr auf dem Markt sind. Da die Resultate aber in den Größenordnungen übereinstimmen (Bild 4), kann gefolgert werden, dass die Näherungsbeziehungen (9) und (10) durchaus realistische Werte für das schädigungsfreie Arbeitsaufnahmevermögen ergeben (Tabelle 1). Dies zeigt etwa das Beispiel des POM-C Hostaform C 9021, bei dem die Werte $\sigma_s = 64 \text{ N/mm}^2$

und $\epsilon_s = 9\%$ aus der Datenbank [5] einen Arbeitsgrenzwert $w_G \approx 2,9 \text{ Nmm/mm}^3$ ergeben. Da die Werte innerhalb einer Kunststofffamilie je nach Typ erheblich variieren können, empfiehlt es sich, nicht auf Tabelle 1 abzustellen, sondern w_G von Fall zu Fall nach (9) bzw. (10) zu bestimmen.

Der Charakter der Näherung kann in der Arbeitsbedingung (2) mit einem Sicherheitsfaktor von beispielsweise $S \geq 1,2$ Rechnung getragen werden.

Einfache Berechnungsbeispiele

Einfachere Bauteile können mit Hilfe der obigen Berechnungsformeln und den Gleichungen aus der Elastizitätstheorie ausgelegt werden. Wird etwa ein relativ dünnwandiges Rohr betrachtet, das schlagartigen Belastungen infolge von Druckstößen ausgesetzt ist (Beispiel 1), so liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor. Die Hauptspannungen in Umfangs- und Achsrichtung sind anhand von Beziehungen bestimmbar, die als «Kesselformeln» bekannt sind. Da diese Spannungen im ganzen Rohr gleich sind, ist es auch die mit (5) berechnete Formänderungsenergie w . Die gesamte bei Druckstoss umgesetzte Formänderungsenergie W ist dann das Produkt aus w und dem Volumen V des Rohres.

Bei einer Biegefeder, die als Puffer Massen m abubremsen hat, welche mit der Schlaggeschwindigkeit v auftreffen (Beispiel 2), ist der Spannungszustand einachsig. Die Maximalspannung und damit der Grösstwert w_{max} der Formänderungsenergie w treten bei der Einspannung auf. Die dortige Kerbwirkung wird mit der Formzahl α_k berücksichtigt. Die Verknüpfung der Gleichungen der Biegetheorie und der Beziehungen (1) bis (3) erlaubt es, beliebige gesuchte Größen zu bestimmen, wie hier im Beispiel 2 etwa die zulässige Stosskraft und die vorhandene Sicherheit S .

Anwendung in FEM-Berechnungen

Bei FEM-Analysen, wie sie für Bauteile mit komplexeren Geometrien üblich sind, ist für schlagartige Belastungen eine dynamische Berechnung nicht zwingend [8, 9]. Das oben erklärte quasistatische Vorgehen kann auch bei FEM-Berechnungen ange-

wendet werden, solange es nicht zu plastischen Verformungen bzw. zum Crash kommt. Es hat sich gezeigt, dass die knotenbezogenen Resultate besser sind als bei elementbezogener Betrachtung. Je nach Programm ist die Möglichkeit, die Formänderungsenergie w direkt als Knoteninformation auszuwerten, implementiert, bei MSC.Marc Mentat etwa unter dem Begriff Strain Energy Density. In andern Programmen wie z.B. bei Ansys kann dies der Benutzer unter User Defined Result als Formel

$$w = \frac{1}{2} * (S1 * EPEL1 + S2 * EPEL2 + S3 * EPEL3) \quad (11)$$

entsprechend (4) eingeben. Darin bezeichnen das Symbol S die Hauptspannungen, EPEL die zugehörigen (elastischen) Hauptdehnungen und die Ziffern 1 bis 3 die Hauptrichtungen.

Wenn die Schlagenergie $E_{kin} = W$ vorgegeben ist, sind weder Belastung noch Verformung bekannt. Dann empfiehlt sich ein inkrementelles Vorgehen mit schrittweiser Lasterhöhung und laufender Auswertung der sich dabei aufbauenden Formänderungsenergie gemäss der Summe

$$W \approx \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta f_i \quad (12)$$

Darin sind F_i die aktuelle Last beim i -ten Inkrement und Δf_i das zugehörige Verformungsinkrement. Diese Aufsummierung wird durchgeführt, bis ausreichende Übereinstimmung mit der gegebenen Schlagenergie erreicht ist.

Fazit

Wenn wie im Fall der schlagartigen Belastung die relevanten Werkstoffkennwerte für genauere Analysen fehlen, auf Berechnungen aber nicht verzichtet werden kann, so

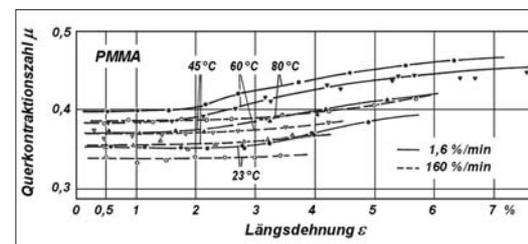
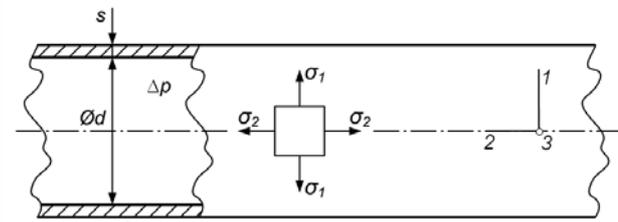


Bild 5: Poissonzahl von PMMA in Abhängigkeit der Temperatur und der Dehngeschwindigkeit (nach Frank [7])

Berechnungsbeispiel: Rohr unter Druckstoss

Gegeben: Innendurchmesser d , Wanddicke s , Druckstoss Δp , Elastizitätsmodul E , Poissonzahl μ



Gesucht: Formänderungsenergiedichte w , Formänderungsenergie W

Lösung:

Zweiachsiger Spannungszustand: Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \frac{\Delta p \cdot d}{2 \cdot s}$$

$$\sigma_2 = \frac{\Delta p \cdot d}{4 \cdot s}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Formänderungsenergiedichte, mit (5):

$$w = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)$$

$$w = \frac{5 - 4 \cdot \mu}{32} \cdot \frac{\Delta p^2 \cdot d^2}{E \cdot s^2}$$

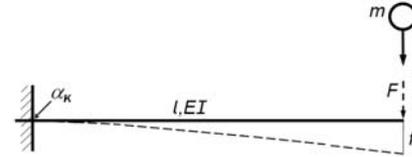
Formänderungsenergie bzw. -arbeit:

$$W = w \cdot V \approx w \cdot \pi \cdot d \cdot s \cdot l = \pi \cdot \frac{5 - 4 \cdot \mu}{32} \cdot \frac{\Delta p^2 \cdot d^3 \cdot l}{E \cdot s}$$

Beispiel 1: Rohr unter Druckstoss

Berechnungsbeispiel: Biegefeder als Puffer

Gegeben: Masse m , Geschwindigkeit v , Länge l , Achsiales Flächenträgheitsmoment I , Achsiales Widerstandsmoment W_b , Formzahl α_k , Elastizitätsmodul E , Poissonzahl μ , Grenzwert w_G der Formänderungsenergiedichte, Einflussfaktor C



Gesucht: Zulässige Stosskraft F , Sicherheitsfaktor S

Lösung:

Biegetheorie:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_b = \alpha_k \cdot \frac{M_b}{W_b} = \alpha_k \cdot \frac{F \cdot l}{W_b}$$

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Maximale Formänderungsenergiedichte (3), Arbeitsbedingung (2):

$$w_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{\max}^2}{E} = \frac{1}{2 \cdot E} \left(\alpha_k \cdot \frac{F \cdot l}{W_b} \right)^2 \leq w_{zul} = w_G \cdot \frac{C}{S}$$

Zulässige Stosskraft:

$$F \leq F_{zul} = \frac{W_b}{\alpha_k \cdot l} \cdot \sqrt{2 \cdot w_G \cdot E \cdot \frac{C}{S}}$$

Energieerhaltungssatz (1):

$$E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2} = W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot f = \frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{W_b^2}{\alpha_k^2} \cdot w_G \cdot \frac{C}{S} \cdot \frac{l}{3 \cdot I}$$

Sicherheitsfaktor:

$$S \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{W_b^2 \cdot l}{\alpha_k^2 \cdot I} \cdot \frac{w_G}{m \cdot v^2} \cdot C$$

Beispiel 2: Biegefeder als Puffer

Kunststoff	w [Nmm/mm ³]
ABS	1,3
PVC-U	2,1
PMMA	1,5
PC	>2,1
PC mit 20 % Glasfasern	2,2
PA 6 mit 25 % Glasfasern	1,6
POM	>2,6
PP	1,2

Tabelle 1: Grenzwerte $w_{min} = w_G$ der Formänderungsenergiedichte einiger Werkstoffe aus Schnellzerreissversuchen [1, 2]

wird man sich wohl oder übel mit einem Behelf zufrieden geben müssen. Der hier aufgezeigte Weg beansprucht keine wissenschaftliche Relevanz, auch wenn er weitgehend auf wissenschaftlichen Erkenntnissen basiert. Er schliesst aber die Lücke bei der Bestimmung des Arbeitsgrenzwerts w_G mit einer Näherung, welche sich als praktikabel erwiesen hat. Damit können Bauteile, welche schlagartige Belastungen schädigungsfrei auszuhalten haben, mit linearelastischen

und quasistatischen Berechnungen ausgelegt werden. Der Approximationscharakter lässt sich über einen etwas erhöhten Sicherheitsfaktor S in der Arbeitsbedingung (2) berücksichtigen.

Literatur

[1] Boden, H.-E.: Das mechanische Verhalten von Thermoplasten bei stossartiger Belastung. Diss., RWTH Aachen, 1983

[2] Rest, H.: Berechnung der Mindeststossfestigkeit von Kunststoffbauteilen. Diss., RWTH Aachen, 1984

[3] Menges, G., Knausenberger, R., Boden, H.-E.: Sind die genormten Prüfverfahren für zügige und schlagartige Beanspruchung noch zeitgemäss? Z. Werkstofftechnik 13(1982), S. 149-163

[4] Menges, G., Haberstroh, E., Michaeli, W., Schmachtenberg, E.: Werkstoff-

kunde Kunststoffe. Carl Hanser Verlag München, 6. Aufl., 2011

[5] Material Data Center – Werkstoffdaten. M-Base Engineering+Software GmbH, Aachen; www.materialdatacenter.com

[6] Campus Werkstoffdatenbank. CWFG mbH, Frankfurt/Main; www.campusplastics.com

[7] Frank, U.: Die Querkontraktion von Kunststoffen, dargestellt am Beispiel amorpher Thermoplaste. Diss., Universität Stuttgart, 1984

[8] Schleede, K.: Rechnerunterstützte Auslegung von Spritzgießteilen. Diss., RWTH Aachen, 1988

[9] Stommel, M., Stojek, M., Korte, W.: FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen. Carl Hanser Verlag München, 2011