

Knicken unter der Wirkung axialer Massenkräfte



Carbon-Pfeil beim Bogenschießen: Massenkräfte infolge hoher axialer Beschleunigung können bei schlanken Stäben zum Knicken führen

(Bild: www.kemmeribodenbad.ch)

Auslegung. Knicken von stabförmigen Bauteilpartien unter Druckbeanspruchung ist ein mitentscheidendes Kriterium bei der Auslegung von Kunststoffkonstruktionen, da thermoplastische Kunststoffe wegen ihrer

vergleichsweise geringen Steifigkeit schon bei relativ kleinen Schlankheitsgraden zu einem Eulerschen Knickverhalten führen [1, 2]. Axial wirkende Massenkräfte vermindern die Stabilitätsgrenze [3], weshalb es angezeigt ist, die Zusammenhänge genauer zu betrachten.

JOHANNES KUNZ

Die Eulersche Theorie des Knickens von Stäben unter der Wirkung axialer Kräfte an den Enden des Stabs [4] basiert auf einer Biegetheorie 2. Ordnung. Sie setzt ideale Verhältnisse voraus: Die Achse des zylindrischen Stabs ist gerade, der Querschnitt ist konstant, die axial ausgerichteten Druckkräfte F wirken zentral, also im Schwerpunkt der Querschnittsfläche am Stabende, die Massenkräfte werden als unbedeutend vernachlässigt, die geometrischen Randbedingungen sind vollkommen erfüllt, und das Material verformt sich unter Last linear-elastisch bzw. linear-viskoelastisch. Wichtigstes Ergebnis dieser Eulerschen Theorie ist die kleinste Kraft, unter der das stabile Gleichgewicht der axialen Druckkräfte instabil wird. Diese kritische Kraft bzw. Knickkraft ist bestimmt durch die Beziehung

$$F_K = k \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad (1)$$

Darin sind E der Elastizitätsmodul, I das für das Knicken maßgebende axiale Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts, l die Stablänge und k ein Zahlenfaktor für die Erfüllung der Randbedingungen, der also die Wirkung der Lagerung ausdrückt. Die kombinatorische Variation der möglichen Randbedingungen führt zu den Knickfällen 1 bis 5 (Bild 1) [2].

Bei Kunststoffen ist die Tatsache zu beachten, dass die Knickkraft (Gleichung 1) mit dem Kriechmodul E_C anstelle des Elastizitätsmoduls E zu bestimmen ist. Unter E soll im Folgenden je nach Gegebenheit der Elastizitäts- oder der Kriechmodul verstanden werden. Da dieser mit zunehmender Belastungszeit t abnimmt, sinkt damit auch die Knickkraft bzw. steigt das Risiko des Knickens.

Dagegen ist die kritische Stauchung

$$\epsilon_K = \frac{\sigma_K}{E} = \frac{F_K}{E \cdot A} = k \cdot \pi^2 \cdot \frac{I}{l^2 \cdot A} = \quad (2)$$

also die auf die Stablänge l bezogene Verkürzung des Stabs beim Knicken, allein von der Geometrie bestimmt und somit werkstoffunabhängig [1]. Kennzahl für die knickrelevante Geometrie des Stabs ist dabei der in Gleichung 2 enthaltene sog. Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (3)$$

Wirkung axialer Massenkräfte

Wenn zusätzlich zur Einzellast, die an den Stabenden wirkt, noch eine erhebliche axiale Massenkraft $m \cdot a$ auftritt (Bild 2), sind die Ergebnisse (Gleichungen 1 und 2) der Eulerschen Theorie nicht mehr anwendbar. Solche Massenkräfte können etwa bei hohen axialen Beschleunigungen auftreten oder in Form des Eigengewichts bei schlanken, vertikal ausgerichteten Stäben, z. B. bei Masten.

Bei konstantem Querschnitt ist die Massenkraft gleichmäßig über die Stablänge l verteilt. Die mathematische For-

Fall	1	2	3	4	5	6	7
k	4,0	1,0	0,25	2,05	1,0	0,25	2,05
c ₁	7,72	1,92	0,795	5,42	1,88	0,352	3,09
c ₂	0,93	0,92	2,18	1,65	0,88	0,408	0,51
Ref.	[3, 4]	[3, 4, 6]	[3, 4, 5]	[3, 4]	[3, 4]	[3, 4, 6]	[3, 4]

Bild 1. Knickfälle und zugehörige Konstanten k , c_1 und c_2 (Quelle der Grafiken: IWK)

mulierung dieser Problemstellung führt auf Besselsche Differenzialgleichungen, die nicht geschlossen lösbar sind und deshalb einer numerischen Lösung bedürfen [3]. Die kombinatorische Variation der

Randbedingungen ergibt nebst den fünf Eulerschen Knickfällen zwei weitere (Bild 2). Die Fälle 6 und 7 entsprechen den Fällen 3 bzw. 4, jedoch mit vertauschten Randbedingungen. Diese Unterscheidung wird bei Wegfall der Massenkraft bedeutungslos.

Die Lösungen lassen sich analog zur Eulerschen Knickkraft (Gleichung 1) in der allgemeinen Form

$$F_{0K} = \frac{c_1}{1 + c_2 \cdot \frac{F}{F_0}} \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad (4)$$

darstellen. F_0 ist hier die Summe aus der Einzelkraft F am gegenüberliegenden Stabende und der Massenkraft $m \cdot a$. F_{0K} ist die Knicklast, also die kritische Größe der Kraft F_0 bei Erreichen der Stabilitätsgrenze. Sie wird von den Konstanten c_1 und c_2 , die von den Randbedingungen abhängen (Bild 2), sowie dem Kraftverhältnis F/F_0 beeinflusst. Bei Erreichen von F_{0K} wird das Kräftegleichgewicht instabil, d.h. die Zuordnung der Stabkraft zur Stabverformung ist nicht mehr ein- →

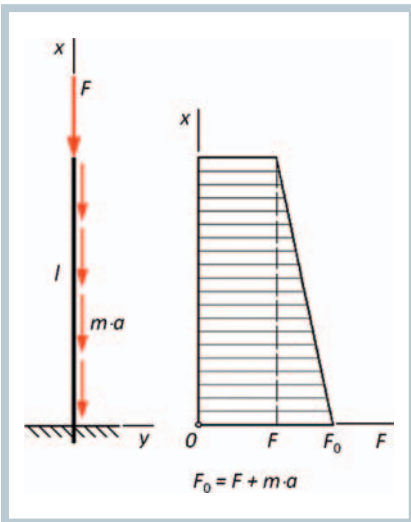


Bild 2. Axiale Kräfte am Druckstab: Einzelkraft F und Massenkraft $m \cdot a$

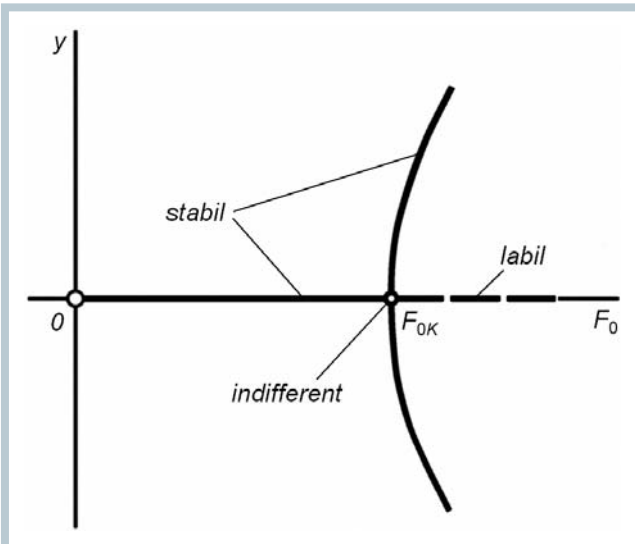


Bild 3. Auslenkung y der Stabachse in Funktion der Axialkraft F_0 und zugeordnete Gleichgewichtsarten (Gleichgewichtsverzweigung)



Schön, wenn man die richtige Entscheidung getroffen hat. Reduzieren Sie Ihren Energieverbrauch.



gwk

Kühlen und Temperieren mit System

Gesellschaft Wärme Kältetechnik mbH
Friedrich-Ebert-Str. 306 · D-58566 Kierspe
Tel. +49 2359 665-0 · www.gwk.com

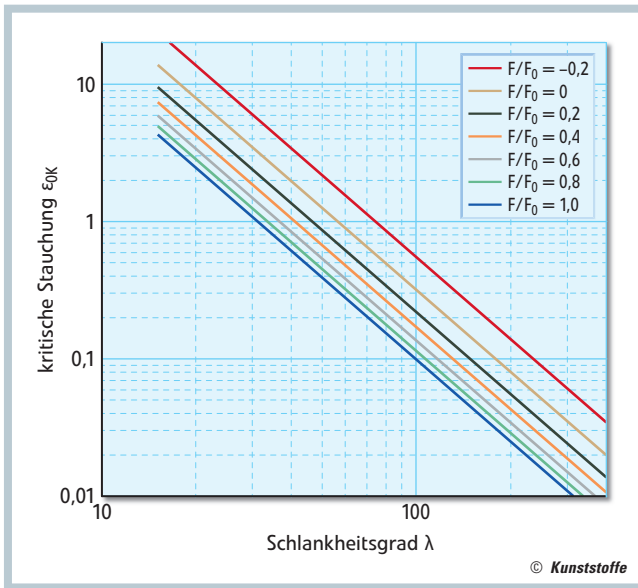


Bild 4. Dimensionsloses, werkstoffunabhängiges Knickdiagramm: Knickfall 3 als Beispiel

über, stellen also deren Verallgemeinerung dar.

Stabilität und Sicherheit

Bei der Auslegung knickgefährdeter Konstruktionselemente geht es zumeist darum, eine ausreichende Stabilität sicherzustellen, also Knicken zu vermeiden. Hierzu bedient man sich der Stabilitätsbedingung

$$F_0 \leq F_{0zul} = F_{0K} \cdot \frac{C}{S_K} = \frac{c_1}{1 + c_2 \cdot \frac{F}{F_0}} \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \cdot \frac{C}{S_K} \quad (8)$$

mit der Knickkraft F_{0K} gemäß (Gleichung 4). Mit dem Einflussfaktor C können Imperfektionen berücksichtigt werden, also Abweichungen von den ideal erfüllten Voraussetzungen, wie vorgebogene Stabachse, nachgiebige Lagerung, exzentrischer oder nichtaxialer Lastangriff sowie nichtlineares Verformungsverhalten des Werkstoffs. In diesem Zusammenhang hat sich für beliebige Schlankheitsgrade $C \approx 0,65$ als probate Größenordnung erwiesen [2]. Die Sicherheit S_K kann je nach Problemstellung im Bereich zwischen 1,8 bis 5 liegen, wobei die niedrigeren Werte eher bei axial bewegten Teilen Anwendung finden, wenn die Massenkräfte möglichst gering sein sollen.

deutig, denn auch eine leicht ausgelenkte Stabachse kann eine Gleichgewichtslage sein (Bild 3). Für Kräfte $F_0 < F_{0K}$ ist das Gleichgewicht stabil, und die Stabverformung besteht aus einer Stauchung.

Gleichung 4 ist eine Näherung, allerdings eine sehr gute mit einer maximalen Abweichung von weniger als 2 %. Sie gilt mit etwas geringerer Genauigkeit selbst dann, wenn die Kraft F auf Zug wirkt, sofern sie den Betrag von $0,2 \cdot F_0$ nicht überschreitet und als negative Größe eingesetzt wird [3], also in den Grenzen $(-0,2 \leq F/F_0 \leq 1)$.

Die kritische Stauchung bei $x = 0$, analog zu Gleichung 2 berechnet aus Gleichung 4, ist nun

$$\epsilon_{0K} = \frac{c_1}{1 + c_2 \cdot \frac{F}{F_0}} \cdot \pi^2 \cdot \frac{I}{l^2 \cdot A} \quad (5).$$

Darin zeigt sich eine Abhängigkeit von den axialen Massenkräften, ausgedrückt im Kraftverhältnis F/F_0 . Gezielte Umformungen mit Einbau des Schlankheitsgrads (Gleichung 3) führen zur Gleichung

$$\epsilon_{0K} = \frac{1 + c_2}{1 + c_2 \cdot \frac{F}{F_0}} \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad (6).$$

Dieser Zusammenhang kann in Form des von Menges und Gaube eingeführten dimensionslosen, werkstoffunabhängigen Knickdiagramms [1] dargestellt werden. Er ist indessen nicht mehr allein durch die Geometrie bestimmt, sondern vom Knickfall und vom Kraftverhältnis F/F_0 abhängig (Bild 4).

Für eine Auslegungsrechnung kann auch die durchschnittliche Stauchung beim Knicken hilfreich sein. Sie ergibt

sich durch Mittelung über die Stablängen zu

$$\bar{\epsilon}_K = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + c_2}{1 + c_2 \cdot \frac{F}{F_0}} \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{F}{E \cdot A} \right) \quad (7).$$

Daraus kann $\Delta l_K = \bar{\epsilon}_K \cdot l$ als Stabverkürzung beim Knicken sehr einfach berechnet werden.

Die Beziehungen (Gleichungen 4 bis 7) gehen bei Wegfall der Massenkraft in die Gleichungen der Eulerschen Theorie

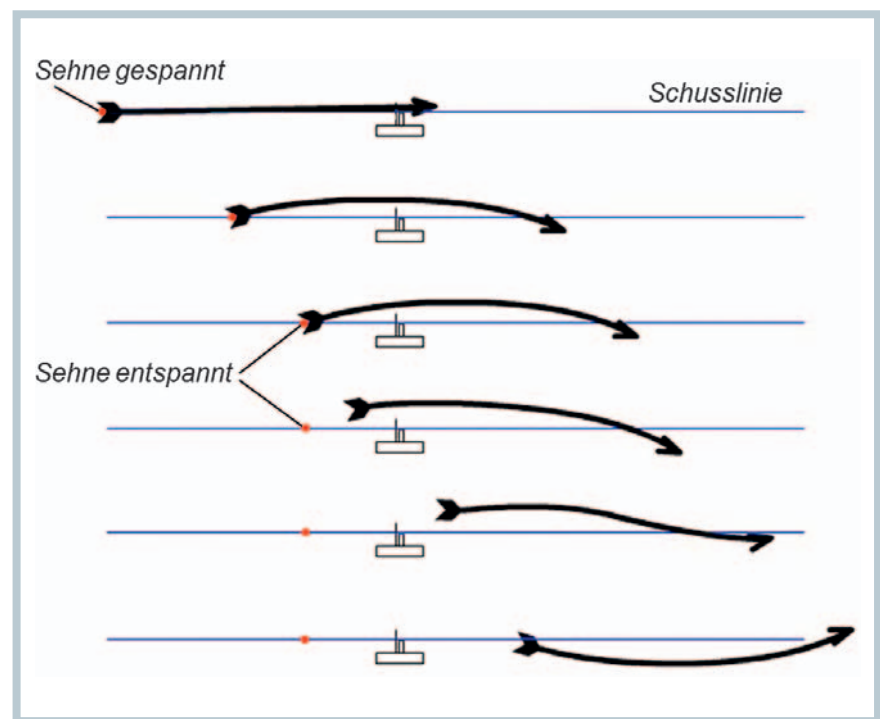


Bild 5. Bogenschießen: Instabiles Verhalten des Pfeils beim Abschuss und daraus resultierende Biegeschwingungen [nach Leach, M.: Pfeile und Pfeilflug beim Bogenschießen, z. B. bei www.vsgstapelfeld.de]

Knicken ist nicht generell gleichbedeutend mit einem Bauteilversagen. Der Übergang vom stabilen zum instabilen Gleichgewicht kann aber auch für bestimmte Effekte gezielt ausgenutzt werden, so etwa zur Erzeugung spezieller Kennlinien bei sog. Knickfedern. Dann wird in Gleichung 8 bewusst die Gleichheit $F_0 = F_{0K} = p \cdot g \cdot A \cdot l_K$ angestrebt, allenfalls sogar $F_0 > F_{0K}$. In diesem Fall ist weiterhin Gleichgewicht möglich, allerdings wird es dann indifferent bzw. labil (**Bild 3**). Eine interessante Beobachtung dieses Effekts zeigt das Verhalten der Pfeile beim Bogenschießen in der Beschleunigungsphase (**Titelbild**). Die dabei auftretende Biegung führt zu einer Schwingung des Pfeils während des Flugs (**Bild 5**). So wird beispielsweise bei einem Carbon-Pfeil von der Gesamtmasse $m = 24,5$ g (Pfeilschaft und Spitze) und einem Spinwert 300 entsprechend einer Biegesteifigkeit $E \cdot I \approx 5,1 \cdot 10^6$ N/mm² bei einer durchaus realistischen Beschleunigung $a \approx 7000$ m/s² [8] unter den damit verbundenen hohen Massenkräften praktisch dessen Stabilitätsgrenze erreicht bzw. sogar leicht überschritten. Diese Tatsache liefert eine einleuchtende Erklärung für die geschilderte, in Bogensportkreisen „Pfeilparadoxon“ genannte Erscheinung.

Knicklänge

Wenn ein vertikal aufgerichteter, am unteren Ende eingespannter Stab (Knickfall 3, **Bild 1**) allein durch seine Gewichtskraft belastet wird, so wird seine mögliche Länge durch die Stabilitätsbedingung (Gleichung 8) begrenzt, andernfalls knickt er weg. Die für diesen Grenzfall definierte sog. Knicklänge ergibt sich mit $S_K = 1,0$ durch Umformung aus Gleichung 4 mit der Bedingung $F = 0$ und $F_0 = F_{0K} = p \cdot g \cdot A \cdot l_K$ zu

$$l_K = \sqrt[3]{c_1 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\rho \cdot g \cdot A} \cdot C} \quad (9)$$

$$= 1,99 \cdot \sqrt[3]{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot g \cdot A} \cdot C}$$

mit $c_1 = 0,795$ für den Knickfall 3. Sie kann als charakteristische Größe für einen druckbelasteten Stab betrachtet werden, der aus einem bestimmten Werkstoff besteht und eine bestimmte Querschnittsgeometrie aufweist. So hat ein handelsübliches Rohr aus PVC-U mit Außendurchmesser $d_a = 32$ mm und Innendurchmesser $d_i = 28,4$ mm eine Knicklänge von $l_K \approx 5,0$ m bei Berücksichtigung eines Einflussfaktors $C \approx 0,65$.

Werkstoffseitig maßgebend ist das Verhältnis von Elastizitätsmodul zu Dichte. Dementsprechend erreicht das geometrisch gleiche Rohr als GFK-Ausführung je nach Verstärkungssystem und Faservolumenanteil eine gut und gern zwei- bis zweieinhalbmal so große Knicklänge.

Fazit

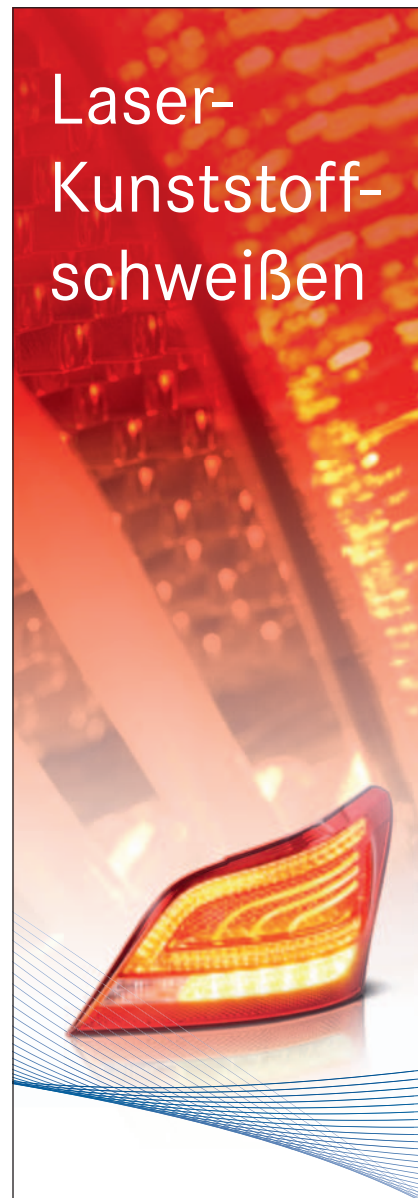
Axial wirkende Massenkräfte können bei knickgefährdeten Kunststoffkonstruktionen trotz der vergleichsweise geringen Dichte erheblich sein. Sie sollten daher nicht außer Acht gelassen werden. Die hier vorgestellten Zusammenhänge ermöglichen es, axiale Massenkräfte bei Berechnungen auf Knicken auf korrekte Weise zu berücksichtigen. Abzuraten ist vom gelegentlich praktizierten Vorgehen, einen gewissen Teil der Massenkräfte den Einzellasten an den Stabenden zuzuschlagen, etwa ein Drittel oder die Hälfte, und dann mit der Euler-Formel (Gleichung 1) zu rechnen. Denn die so erhaltenen Werte können je nach Knickfall und Kraftverhältnis F/F_0 in unbekannter Höhe nach oben oder nach unten von den theoretisch genauen Ergebnissen abweichen. ■

LITERATUR

- Menges, G., Gaube, E.: Knicken und Beulen von thermoplastischen Kunststoffen am Beispiel des Hartpolyäthylens. *Kunststoffe* 58 (1968) 2, S. 153–158 (Teil 1) und 58 (1968) 9, S. 642–648 (Teil 2)
- Kunz, J.: Druckbelastungsgrenzen von Stäben geringer Schlankheitsgrade. *Konstruktion* 60 (2008) 4, S. 94–98
- Pflüger, A.: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. 3. Aufl., Springer Verlag Berlin, 1975
- Euler, L.: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; Appendix: *De curvis elasticis*. Lausanne und Genf, 1744
- DIN 4114 (1952/53; zurückgezogen): *Stahlbau – Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung); Berechnungsgrundlagen, Vorschriften*
- Kunz, J.: Zum Knickproblem eines durch sein Eigengewicht belasteten Stabs. Verbesserung eines Resultates von Willers. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 25 (1974), S. 547–550
- Kunz, J.: Eigene, unveröffentlichte Berechnungen, 1980
- N. N.: Wie stark beschleunigt ein Pfeil? Hochschule OS-Lingen führt Messungen beim Bogensportclub Lingen durch. www.campus-lingen.hs-osnabrueck.de, 11. April 2011

DER AUTOR

PROF. DIPL.-ING. JOHANNES KUNZ, geb. 1940, ist am Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Schweiz, tätig; jkunz@hsr.ch



Laser-Kunststoffschweißen

Sicher, sauber, wirtschaftlich
Systemlösungen von LPKF – erfolgreich durch Know-how und Prozesserfahrung.

**Fakuma: 16. – 20.10.2012,
Halle A4, Stand 4122**

LPKF
Laser & Electronics

LPKF Laser & Electronics AG – Bereich Laser Welding
Tel. +49 (9131) 61657-0 www.lpkf-laserwelding.com