

› Auslegung von Kunststoffkonstruktionen

Die Querkontraktionszahl in der Konstruktionspraxis

Die Querkontraktionszahl ist bei der Bauteilauslegung von grosser Bedeutung (Bild 1). Sie verknüpft die Spannungs- bzw. die Dehnungsgrössen bei mehrachsigen Spannungs- bzw. Verformungszuständen, und sie ist unverzichtbar als Eingabegrösse bei FEM-Rechnungen. Umso bedauerlicher ist die Tatsache, dass diese «Schlüsselkennzahl» [1] in keiner Datenbank dokumentiert ist – ein Mangel, der dringend behoben werden sollte.

› Johannes Kunz¹

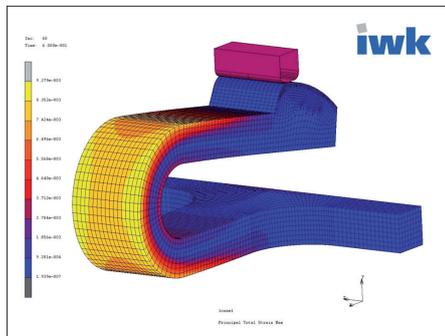


Bild 1: Die Querkontraktionszahl ist auch mitbestimmend für die Ergebnisse von FEM-Analysen (IWK)

Die als Querkontraktion bekannte Erscheinung besteht darin, dass bei einem einachsig gezogenen Stab gleichzeitig mit der Verlängerung die Querschnittsabmessungen mehr oder weniger stark abnehmen (Bild 2). Sie ist auf die Eigenschaft der Werkstoffe zurückzuführen, ihr Volumen unter Belastung so wenig wie möglich zu ändern. Werkstoffmechanisch erfasst wird die Querkontraktion durch die Querkontraktionszahl oder Poissonzahl, welche die Querdehnung ϵ_q mit der Längsdehnung ϵ_l unter einachsiger Beanspruchung linear verknüpft nach der Definition

$$\mu = -\frac{\epsilon_q}{\epsilon_l} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (1)$$

iwk
Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung

¹Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, geb. 1940, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Schweiz; jkunz@hsr.ch

gültig gilt für isotrope Werkstoffe. Darin sind ϵ_x , ϵ_y und ϵ_z die Dehnungen in den drei Raumrichtungen x, y, z (Bild 2). Bei Zugbeanspruchung gilt

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} > 0; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0} < 0; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta d}{d_0} < 0 \quad (2)$$

Unter Druckbeanspruchung sind die Vorzeichen umgekehrt. In einzelnen Fachschriften wird statt dem Symbol μ auch etwa ν verwendet.

Die Werte der Querkontraktionszahl liegen zwischen den theoretischen Grenzen $\mu = 0$ für Werkstoffe, die wie etwa offenporige Schaumstoffe keine Querkontraktion zeigen, und $\mu = 0,5$ bei vollständiger Inkompressibilität. Damit ist die Querkontraktionszahl auch ein Mass für die Kompressibilität der Werkstoffe. Die realen Werte der Kunststoffe liegen zwischen etwa 0,3 und 0,5. Allgemein strebt die Querkontraktionszahl mit abnehmender Steifigkeit und zunehmender Temperatur gegen 0,5 (Bild 3). An dieser oberen Grenze liegen Flüssigkeiten, wozu

auch Kunststoffschmelzen gehören, und sehr weiche Kunststoffe wie Elastomere.

Die Querkontraktionszahl ist wie die Modul ein Kennwert des elastischen bzw. viskoelastischen Werkstoffverhaltens. Als solcher verknüpft sie beispielsweise den Elastizitäts- bzw. Kriechmodul E_C mit dem Schub- bzw. Kriech-Schubmodul isotroper Werkstoffe gemäss

$$G_C = \frac{E_C}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (3)$$

was für die Bestimmung des Schubmoduls genutzt werden kann, oder den Kriechmodul mit dem Kompressionsmodul

$$K_C = \frac{E_C}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \quad (4)$$

Dieser ist als Verhältnis der mittleren Normalspannung zur Volumendehnung definiert. Mit $\mu = 0,5$ strebt der Kompressionsmodul gegen unendlich, was bedeutet, dass solche Werkstoffe unter Belastung nicht komprimierbar sind.

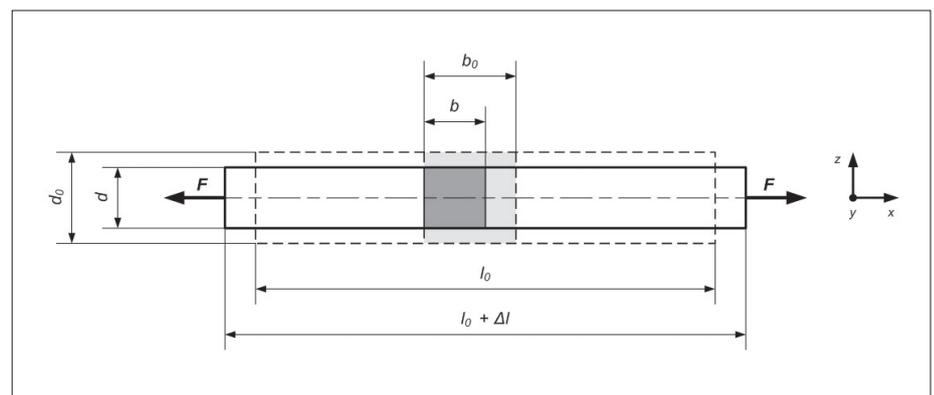


Bild 2: Querkontraktion am einachsigen gezogenen Stab (schematisch)

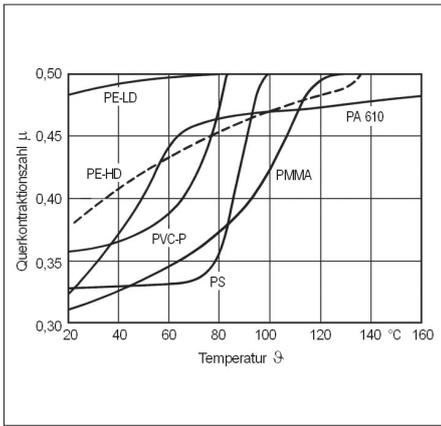


Bild 3: Querkontraktionszahl einiger Thermoplaste in Funktion der Temperatur (nach Schenkel [1])

Die Querkontraktionszahl ist keine Konstante, sondern grundsätzlich von den Prüfbedingungen und von den Struktur- und Verarbeitungsparametern der Kunststoffe abhängig. Diese Abhängigkeiten und die Verfahren zu ihrer Ermittlung sind an ausgewählten Kunststoffen wissenschaftlich untersucht und beschrieben worden [2 – 6]. Die Erkenntnisse lassen sich qualitativ verallgemeinern. So zeigt sich, dass auch die Erscheinung der Querkontraktion der Viskoelastizität unterliegt. Bei kurzzeitiger Belastung nimmt die Querkontraktionszahl mit zunehmender Dehngeschwindigkeit ab [5], im Zeitstand-Zugversuch steigt sie mit der Belastungszeit etwas an [4] (Bild 4). Zudem nimmt sie mit wachsender Verformung ein wenig zu (Bild 5). Bei teilkristallinen Thermoplasten sinkt die Querkontraktionszahl mit zunehmendem Kristallisationsgrad leicht, was auf die dabei steigenden Nebenvalenzkräfte zurückgeführt wird [5]. Die Füllung mit Fasern oder Mineralpartikeln reduziert die Querkontraktionszahl ebenfalls, und zwar, wie aus einzelnen bekannten Messwerten geschlossen werden kann [8], je nach dem Anteil an Fasern bzw. Füllstoffen um etwa 0,02 bis 0,04.

Charakteristisch ist der Anstieg der Querkontraktionszahl mit steigender Temperatur vom Ausgangswert bei Raumtemperatur bis zur oberen Grenze von $\mu = 0,5$ im Schmelzzustand (Bild 3). Die übrigen Parameter Zeit, Dehnung und Dehngeschwindigkeit haben sich bis zu Dehnungen von 1 bis 2 % als untergeordnete Einflüsse herausgestellt [4].

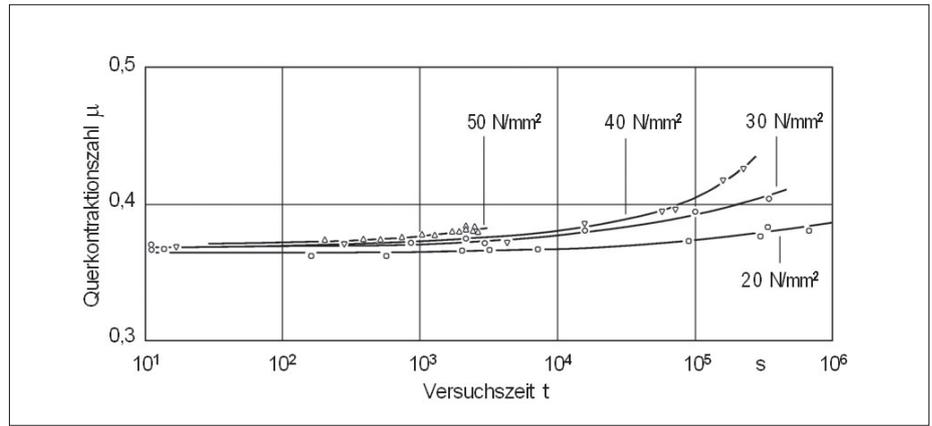


Bild 4: Querkontraktionszahl von S-PVC in Funktion von Belastungszeit und Spannung (nach Frank [4])

Dreidimensionales Verformungsverhalten

Als Werkstoffkenngröße dient die Querkontraktionszahl u.a. dazu, das dreidimensionale Verformungsverhalten der Werkstoffe unter mechanischer Beanspruchung zahlenmäßig zu beschreiben. Im dreiachsigen Spannungszustand überlagern sich die «einachsigen» Dehnungen ϵ_{xe} , ϵ_{ye} , ϵ_{ze} mit den in gleicher Richtung auftretenden Querkontraktionen. Diese «einachsigen» Dehnungen sind jene Werte, die die einzelnen Normalspannungen σ_i hervorrufen würden, wenn sie je für sich allein einachsig wirken würden. Sie lassen sich bequem etwa anhand eines isochronen Spannungs-Dehnungs-Diagramms bestimmen. Resultat dieser Überlagerung ist das Gleichungssystem

$$\epsilon_x = \epsilon_{xe} - \mu \cdot (\epsilon_{ye} + \epsilon_{ze}) = \frac{\sigma_x}{E_{Cx}} - \mu \cdot \left(\frac{\sigma_y}{E_{Cy}} + \frac{\sigma_z}{E_{Cz}} \right) \quad (5.1)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{ye} - \mu \cdot (\epsilon_{ze} + \epsilon_{xe}) = \frac{\sigma_y}{E_{Cy}} - \mu \cdot \left(\frac{\sigma_z}{E_{Cz}} + \frac{\sigma_x}{E_{Cx}} \right) \quad (5.2)$$

$$\epsilon_z = \epsilon_{ze} - \mu \cdot (\epsilon_{xe} + \epsilon_{ye}) = \frac{\sigma_z}{E_{Cz}} - \mu \cdot \left(\frac{\sigma_x}{E_{Cx}} + \frac{\sigma_y}{E_{Cy}} \right) \quad (5.3)$$

Darin sind E_{Ci} die möglicherweise spannungsabhängigen Kriechmoduln. Sind sie konstant, so resultieren die als Verallgemeinertes Hookesches Gesetz bekannten Beziehungen

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_C} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (6.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E_C} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] \quad (6.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E_C} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6.3)$$

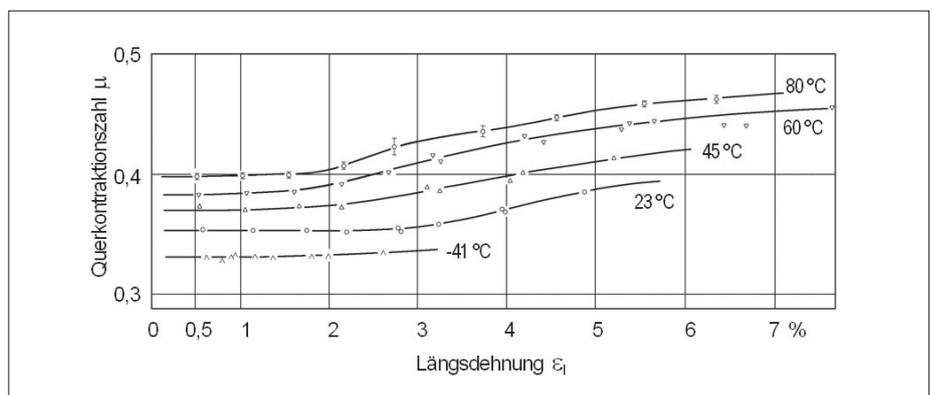


Bild 5: Querkontraktionszahl von PMMA in Funktion von Dehnung und Temperatur (nach Frank [4])

Die Gleichungssysteme (5) und (6) verknüpfen den Spannungszustand mit dem Verformungszustand, der im Allgemeinen dreiaxig ist.

In den Berechnungsgleichungen für die Bauteilauslegung tritt die Querkontraktionszahl also gewöhnlich dann auf, wenn mehrachsige Spannungs- und/oder Verformungszustände vorliegen. So ist sie beispielsweise mitbestimmend für die Biegesteifigkeit von flächigen Tragelementen wie Platten usw. mit der Dicke h , der sog. Plattensteifigkeit, nach der Beziehung

$$S_b = \frac{E_c \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (7)$$

Wird hierin die Querkontraktionszahl zwischen 0,35 und 0,45 variiert, so wirkt sich dies mit einem Steifigkeitsunterschied von 10 % aus.

Als massgeblicher Werkstoffkennwert für die Beschreibung der räumlichen Verformung eines Bauteils unter Belastung ist die Querkontraktionszahl also unverzichtbar, insbesondere auch als Eingabegrösse bei FEM-Analysen. Deren Ergebnisse hängen somit wesentlich davon ab, mit welcher Genauigkeit und Trefflichkeit diese Kennzahl bekannt

ist. Häufig muss die Querkontraktionszahl auch beigezogen werden, um mit Gleichung (3) anhand des Kriechmoduls E_c den Kriech-Schubmodul G_c zu bestimmen.

Anforderungen der Konstruktionspraxis

Die Konstruktionspraxis ist für eine vernünftige Bauteilauslegung auf zahlenmässige Angaben über die Querkontraktionszahl angewiesen, die wie die andern Kennwerten ausreichend genau und vor allem auch für möglichst viele Kunststoffe verfügbar sind. Und dies in einem sinnvollen Parameterbereich, d.h. bei der Temperatur etwa bis zur oberen Gebrauchsgrenztemperatur.

Leider fehlen solche Informationen weitgehend, in den gängigen Datenbanken sind sie gänzlich abwesend. Dabei ist es mit den heutigen Technologien ohne nennenswerten Mehraufwand möglich, die Querkontraktionszahl systematisch zu ermitteln und in den Datenbanken auszuweisen. Die Querdehnung kann im Zugversuch, beispielsweise mit Videoextensometrie (Bild 6), gleichzeitig mit den übrigen Zug-Eigenschaften berührungslos mitgemessen und im Auswerteprogramm entsprechend (1) zur Querkontraktionszahl verrechnet wer-

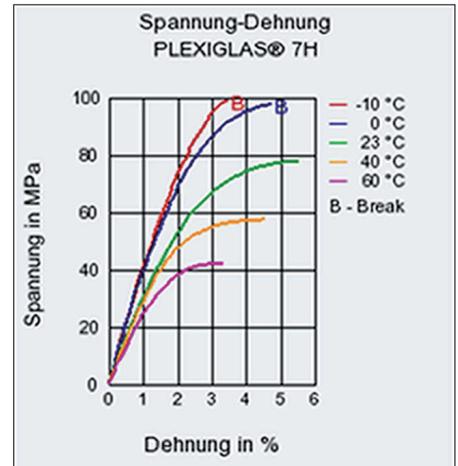


Abb. 7: Isothermes Spannungs-Diagramm von PMMA (Plexiglas H7) aus der Datenbank Material Data Center

den. Ideal wäre ein Kurvenverlauf, der wie Bild 3 die Querkontraktionszahl in Abhängigkeit der Temperatur als dominanten Einflussparameter zeigen würde. Als Minimum wäre zumindest die Querkontraktionszahl bei Raumtemperatur als Ein-Punkt-Wert zu ermitteln und anzugeben.

Zur behelfsmässigen Überbrückung dieser empfindlichen Lücke sind Ansätze entwickelt worden, welche die Querkontraktionszahl wenigstens abzuschätzen erlauben. Da die Parameter Zeit, Dehnung und Dehngeschwindigkeit bis zu Dehnungen von 1 bis 2 % von lediglich geringfügigem Einfluss sind, können sie in einer ersten Näherung vernachlässigt werden.

Eine brauchbare Näherung auf dieser Basis ist in Anlehnung an [7, 8] etwa die Beziehung

$$\mu(\vartheta) \approx 0,5 - (0,5 - \mu_0) \cdot \frac{E_c(t, \vartheta)}{E_c(t, \vartheta_0)} \quad (8)$$

Darin sind μ_0 die Querkontraktionszahl und E_c der Kriechmodul bei der Zeit t und der Temperatur ϑ . Als Bezugstemperatur ϑ_0 bietet sich in der Regel die Raumtemperatur an. Je nach Verfügbarkeit der Kennwerte kann auch der Elastizitätsmodul mit seiner Temperaturabhängigkeit verwendet werden. Die temperaturabhängigen Moduln können im Idealfall den Datenbanken entnommen werden, z.B. einem isothermen Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 7). Wo sie fehlen, kann möglicherweise die Potenzfunktion

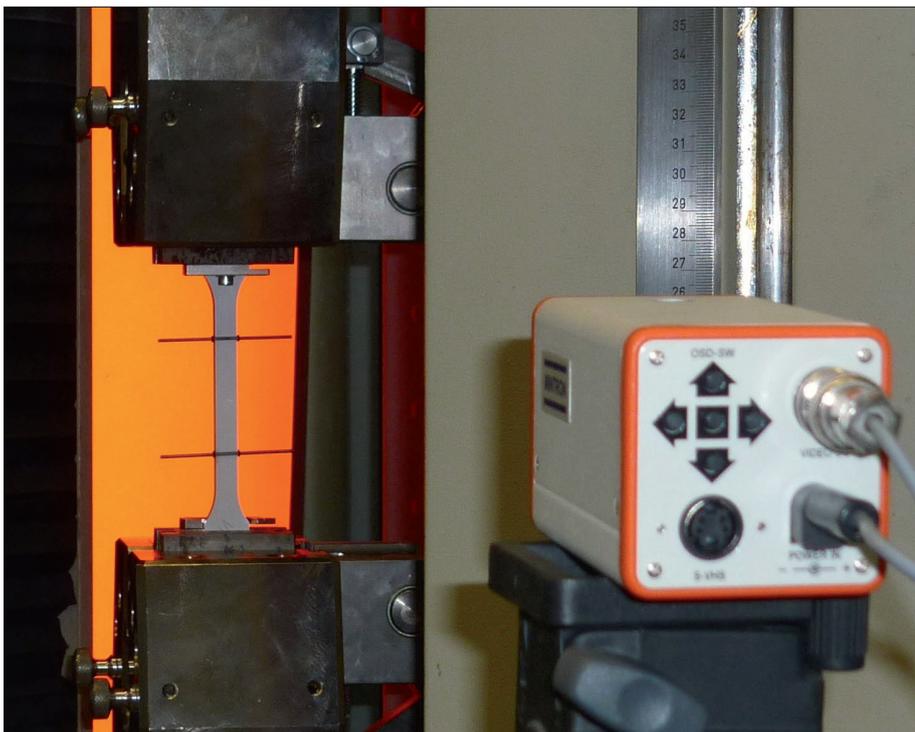


Bild 6: Videoextensometrie erlaubt die berührungslose Dehnungsmessung und damit die direkte experimentelle Untersuchung der Querkontraktion (IKW)

$$\frac{E_c(t, \vartheta)}{E_c(t, \vartheta_0)} \approx a_0 \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} - 1 \right) \quad (9)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten α_0 weiterhelfen [9], was jedoch dessen Kenntnis voraussetzt (Tab. 1).

Leider sind für die Querkontraktionszahl μ_0 kaum verlässliche Werte bekannt. Bei einzelnen Werkstoffen differieren die Angaben sogar erheblich, so beispielsweise für PE-HD zwischen 0,38 [1] und 0,5 [11] oder für PMMA zwischen 0,31 [1] und 0,4 [12]. Die bei fehlenden Werten gelegentlich verwendete Näherung $\mu_0 = 0,3$ [10] oder besser $\mu_0 = 0,35$ [2] kann lediglich als grober Behelf gelten. Eine Hilfe für Abschätzungen mag etwa die Zuordnung der Kunststoff-

gruppen zu Größenordnungen der Querkontraktionszahl sein (Tab. 2).

Unbefriedigende Situation

Diese kurze Betrachtung zeigt, wie unbefriedigend die diesbezügliche Situation insgesamt für die Konstruktionspraxis ist. Umso berechtigter ist der Appell an die Kunststoffhersteller, die Werkstoffprüfer und auch die Normengestalter, die Querkontraktionszahl inskünftig systematisch zu ermitteln und in den Datenbanken auszuweisen. Zumal der Mehraufwand äusserst bescheiden bleibt, wenn die Querdehnung im Zugversuch gleichzeitig mit den übrigen Zug-Eigenschaften beispielsweise mit Videoextensometrie berührungslos mitgemessen und im Auswertprogramm entsprechend (1) zur Querkontraktionszahl verrechnet wird.

Werkstoff	Temperaturkoeffizient α_0	Ob. Temperaturgrenze [°C]	Bemerkungen
PA 6	0,45	60	trocken
PA 66	0,50	90	trocken
POM	0,75	120	
PBT	0,40	60	
PET	0,70	120	
PE-HD	0,50	80	
ABS	0,70	80	
PC	0,85	120	
PS	0,83	80	
PMMA	0,84	60	

Tab. 1: Temperaturkoeffizient ausgewählter Thermoplaste [9]

Querkontraktionszahl μ_0	Werkstoffe
0,30 - 0,35	Steife, spröde Kunststoffe: Duroplaste, amorphe Thermoplaste wie PS, SAN, PMMA, PVC-U
0,35 - 0,40	Steife, zähe Kunststoffe: Thermoplaste und Blends wie PC, ABS, (PC+ABS), (PC+PET), PVC-P, PA6, PA66, POM
0,40 - 0,45	Weichere, zähe Kunststoffe: Thermoplaste wie PE-HD, PP
0,45 - 0,50	Weiche, hochelastische Kunststoffe: Thermoplaste, Elastomere und thermoplastische Elastomere, wie PE-LD, PB, PUR, TPE, TPU

Tab. 2: Richtwerte der Querkontraktionszahl verschiedener Kunststoffgruppen für $0^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 50^\circ\text{C}$

Literatur

- [1] Schenkel, G.: Verfahren zum Bestimmen der Poissonzahl insbesondere bei Kunststoffen. *Kunststoffe* 63(1973)1, S. 49-53
- [2] Pohl, G.: Das grundsätzliche Relaxationsverhalten des Poissonschen Verhältnisses von Plasten und dessen Beziehung zum Elastizitätsmodul. *Plaste und Kautschuk* 12(1965)6, S. 330-332
- [3] Lewen, B.: Das nichtlinear viskoelastische Verhalten von Kunststoffen am Beispiel der Zeit-Temperatur-Verschiebung und der Querkontraktionszahl. Diss. RWTH Aachen, 1991
- [4] Frank, U.: Die Querkontraktionszahl von Kunststoffen, dargestellt am Beispiel amorpher Thermoplaste. Diss. Universität Stuttgart, 1994
- [5] Dassow, J.: Messung und Beschreibung der Querkontraktionszahl von teilkristallinen Thermoplasten als nichtlinear viskoelastischer Materialkennwert. Diss. RWTH Aachen, 1996
- [6] Gutberlet, D.: Messung und Beschreibung der Querkontraktionszahl von Thermoplasten. In: Michaeli, W. (Hrsg.): 18. Kunststofftechnisches Kolloquium des IKV, Tagungsband, 1996
- [7] Giencke, E., Meder, G.: Ermittlung der Kriechfunktionen von zweiachsig beanspruchten Harzen und Laminaten aus den Messwerten für einachsig beanspruchte Harze. *Materialprüfung* 23(1981)3, S. 75-80
- [8] N.N.: Querkontraktionszahlen ausgewählter Bayer MaterialScience Thermoplaste. Firmenschrift PCS 1149 de, Bayer MaterialScience AG Leverkusen, 2008
- [9] Kunz, J.: Temperaturabhängigkeit des Kriechmoduls erfassen. *SwissPlastics* 29(2007)3, S. 25-28
- [10] Menges, G., Haberstroh, E., Michaeli, W., Schmachtenberg, E.: *Werkstoffkunde Kunststoffe*. 5. Aufl., Carl Hanser Verlag München, 2002
- [11] Erhard, G.: *Konstruieren mit Kunststoffen*. 4. Aufl., Carl Hanser Verlag München, 2008
- [12] Progelhof, R. C., Throne, J. L.: *Polymer Engineering Principles*. Carl Hanser Verlag München, 1993