

Konstruktionselemente aus Kunststoff

Kontaktmechanik konkaver Kunststoff-Laufmantelrollen

Verlässliche und vergleichsweise einfache Formeln liegen nun auch für die kontaktmechanische Auslegung von Kunststoffrollen mit konkav profiliertem Laufmantel vor, die statisch belastet sind oder langsam laufen. Mit ihnen können der Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, die Kontaktfläche, die Abplattung, die maximale Dehnung und die Vergleichsspannung in Funktion der wesentlichen Rollenparameter berechnet werden. Dieser Beitrag ergänzt die bisher erschienenen Aufsätze zur Auslegung von Rollen mit einem Kunststoff-Laufmantel [1–5].

Kunststoffrollen mit konkavem Laufmantelprofil (Abb. 1) werden dort eingesetzt, wo der Rollvorgang einer beidseitigen Führung bedarf, so insbesondere für Schiebetüren und ähnliche Anwendungen. Die vorteilhaften Betriebseigenschaften der Kunststoffrollen sind auch hier ein wichtiges Argument: geringe Geräuschentwicklung, hohe mechanische Dämpfung, gutes Federverhalten und hohe Verschleissfestigkeit. Dazu kommt die Möglichkeit der wirtschaftlichen Fertigung insbesondere dann, wenn die Rollen im Spritzgiessverfahren hergestellt werden [6].

Die Kontaktmechanik der Laufmantelrollen beschreibt das Verhalten der Rollen im Kontakt mit der Unterlage als Basis für die Auslegung, insbesondere den unter Belastung entstehenden Kontaktdruck, die Kontaktfläche und die Rollenabplattung, aber auch die in der Rolle entstehenden Spannungen und Dehnungen. Die generell bestimmenden Grössen dabei sind einerseits die mechanischen Eigenschaften von Kunststoff-Laufmantel und Unterlage und andererseits die Geometrie der Rolle und der Kontaktflächen zueinander. Grundlage der Kontaktmechanik ist die Theorie von Hertz [7, 8].

Problemstellung

Im Hinblick auf eine treffliche Auslegung konkaver Kunststoff-Laufmantelrollen interessierte die Frage, inwieweit die Kontaktmechanik solcher Rollen mit der Hertzschen Theorie beschrieben werden kann.



Abb. 1: Kunststoffrollen mit konkavem Laufmantelprofil (ETN Elastomer-Technik Nürnberg GmbH, D-90562 Kalchreuth).

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im NDS Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz

Dipl.-Ing. Wilfried Bürzle, ETH Zürich, zeitweilig wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil



Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung

In einer gezielten Untersuchung ging es also darum [9], die aus der Hertzschen Theorie abgeleiteten Formeln entweder zu bestätigen oder sie dort, wo sie die spezifischen Gegebenheiten der betrachteten Rollen ungenügend erfassen, geeignet anzupassen. Dies mit dem Ziel, der Konstruktionspraxis möglichst einfache, aber hinreichend genaue Berechnungsformeln zur Verfügung zu stellen, und zwar wiederum unter Beschränkung auf statische oder quasistatische Belastungen. Damit können sie für die Berechnung der statischen Tragfähigkeit, des Verformungsverhaltens im Stillstand und der Federwirkung bei langsamer Bewegung sowie für die Beurteilung des Anfahrwiderstands von Rollen beigezogen werden.

Vorgehen

Die Problemstellung wurde wie bei den früheren Untersuchungen kombiniert theoretisch-analytisch und rechnerisch-numerisch bearbeitet. In Anbetracht der bisher damit erzielten guten Übereinstimmung mit experimentellen Resultaten wurde diesmal auf Versuche verzichtet. Damit konzentrierte sich das Vorgehen zur Hauptsache auf die folgenden Schritte:

- Identifikation der massgeblichen Parameter des Problems anhand qualitativer Überlegungen;
- rechnerisch-numerische Analysen mit der Finite Elemente Methode (FEM) unter gezielter Variation der Parameter zwecks Herausarbeitung der geltenden Gesetzmässigkeiten;
- Vergleich der Ergebnisse mit den Resultaten aus der Hertzschen Theorie;
- wo erforderlich, Erarbeiten von mathematisch möglichst einfachen, aber hinreichend genauen Berechnungsformeln für die anvisierten kontaktmechanischen Grössen.

Voraussetzungen und Idealisierungen

Den Überlegungen liegen folgende Voraussetzungen und Idealisierungen zugrunde:

- a) der Laufmantel hat ein konkaves Profil mit in weiten Grenzen variierbarem Radienverhältnis (Abb. 2);
- b) Laufmantel und Nabe sind von gleicher Länge (Rollenbreite);
- c) zwischen Nabe und Laufmantel besteht kein Stoffschluss;
- d) der Kunststoff des Laufmantels

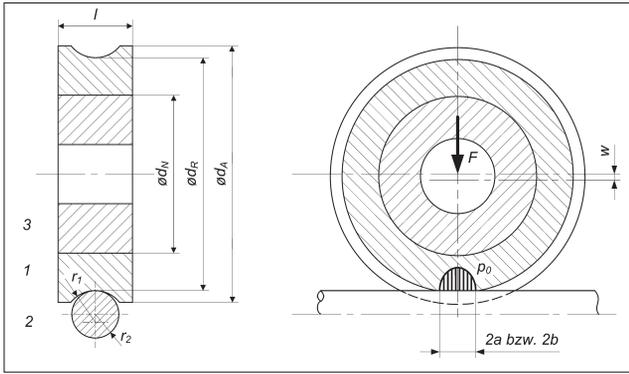


Abb. 2: Geometrie der Laufmattelrollen mit konkavem Profil und Größen der Kontaktmechanik.

1: Laufmantel, mit konkavem Profil. 2: Unterlage (Laufbahn), zylindrisch. 3: Nabe. d_A : Aussendurchmesser [mm]. d_R : Rollendurchmesser [mm]. d_N : Nabdurchmesser [mm]. r_1 : Profilradius der Rolle [mm]. r_2 : Radius der Unterlage [mm]. l : Rollenbreite [mm]. a, b : Halbachse der Kontaktflächenellipse in Umfangsrichtung [mm]. p_0 : Maximaler Kontaktdruck [N/mm²]. w : Abplattung [mm].

verhält sich linear viskoelastisch, das heisst die zeitabhängige Werkstoffsteifigkeit, beschrieben durch den Kriechmodul, ist keine Funktion der Last, und damit gilt das Boltzmannsche Zeit-Verformungs-Superpositionsprinzip [1];

e) allfällige Vorspannungen des Laufmantels durch Aufpressen bzw. Umspritzen lassen sich linear überlagern;

f) die Nabe besteht aus einem Werkstoff vergleichsweise hoher Steifigkeit, sodass ihre Verformung vernachlässigt werden kann;

g) die Belastung besteht aus einer statischen oder quasistatischen Radiallast im Zentrum der Nabe;

h) die Rolle wirkt als reine Laufrolle, das heisst, es wirken keine Tangentialkräfte in der Berührungsfäche;

i) die Unterlage (Laufbahn) ist zumindest im Kontaktbereich von kreiszylindrischer Geometrie und weist linear elastisches bzw. linear viskoelastisches Verformungsverhalten auf.

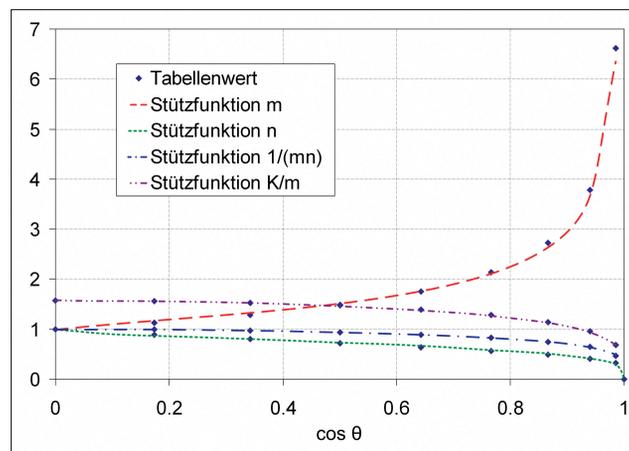
Grundsätzliche Überlegungen

Die Lauffläche von Rollen mit konkavem Profil ist zweifach, also räumlich gekrümmt (Abb. 2): Nebst dem geometriebedingten Krümmungsradius $r_R = d_R/2$ in Umfangsrichtung hat auch ihre Kontur im Querschnitt eine konkave Krümmung vom Radius r_1 . Dieser korres-

pondiert mit dem Krümmungsradius r_2 der zylindrischen, also einfach gekrümmten Unterlage. Für das Verhältnis r_2/r_1 erwünscht ist ein guter Kompromiss zwischen möglichst geringem Kontaktdruck (r_2/r_1 vergleichsweise gross) und möglichst geringem Schlupf beim Abrollen (r_2/r_1 klein). Rolle und Unterlage berühren sich theoretisch, das heisst ohne Verformung der Kontaktkörper, lediglich in einem Punkt. Mit dieser theoretischen Punktberührung ist zumindest eine der Voraussetzungen der Hertzschen Theorie erfüllt, welche in der Kontaktzone von räumlichen Krümmungen ausgeht.

Bei den zu untersuchenden Rollen ist aber damit zu rechnen, dass das Durchmesser Verhältnis d_N/d_R von Nabe und Rolle sich mehr oder weniger stark auf die anvisierten kontaktmechanischen Grössen auswirkt, insbesondere bei relativ dünnem Laufmantel. Analoges könnte der Fall sein, wenn sich die Krümmungsbeträge von Rolle und Unterlage annähern, was zu einer relativ grossen Kontaktfläche führt. Solche Einflüsse könnten gegebenenfalls durch eine entsprechende Anpassung der bekannten Hertzschen Formeln berücksichtigt werden. Also besteht die Aufgabe primär darin, die verschiedenen kontaktmechanischen Grössen in Bezug auf allfällige Abhängigkeiten von Durchmesser Verhältnis d_N/d_R und Radienverhältnis r_2/r_1 zu untersuchen. Also dann wären für gewichtige Abhängigkeiten geeignete mathematische Funktionen zu suchen.

Abb. 3: Krümmungsbeiwerte für die Hertzschen Formeln mit Stützfunktionen im Bereich $0 \leq \cos \Theta \leq 0,985$ [9].



Die lokale Berührungssituation ist bei allen zu untersuchenden Fällen qualitativ gleich: Die räumlich konvex/konkav gekrümmte Oberfläche der Rolle ist in Kontakt mit der zylindrischen Oberfläche der Unterlage. Deshalb soll auch hier versucht werden, die in komplexer Weise von diesen Krümmungsverhältnissen abhängigen Beiwerte der Hertzschen Formeln [7, 8] möglichst einfach mathematisch zu beschreiben.

Untersuchungen

Die Untersuchung mit Variation der relevanten Parameter wurde in bewährter Weise mit der Finite Elemente Methode (FEM) durchgeführt, und zwar mit insgesamt 71 Rechnungen, bei denen die Symmetrieeigenschaften der Problemstellung ausgenutzt wurde. Deren Verlässlichkeit kann aufgrund der Erfahrungen aus den bisherigen Untersuchungen als erwiesen gelten.

Ausgegangen wurde von einer Rolle mit den Referenzabmessungen $d_A = 92,4$ mm, $d_R = 84,0$ mm, $d_N = 33,6$ mm, $l = 25,0$ mm, $r_1 = 8,0$ mm, $r_2 = 6,0$ mm. Die verschiedenen Parameter wurden über folgende Bereiche variiert: $0,4 \leq d_N/d_R \leq 0,8$; $1,05 \leq d_A/d_R \leq 1,25$; $0,15 \leq l/d_R \leq 0,298$; $0,5 \leq r_2/r_1 \leq 0,95$; $0,19 \leq 2 \cdot r_1/d_R \leq 0,75$; Kriechmodul $100 \text{ N/mm}^2 \leq E_C \leq 3000 \text{ N/mm}^2$; Poissonzahl $0,3 \leq \mu \leq 0,45$.

Als Werkstoff der Unterlage (Laufbahn) wurde Stahl angenommen. Die Allgemeingültigkeit der ausgewerteten Resultate wird dadurch nicht eingeschränkt, da die Steifigkeit der jeweiligen Werkstoffpaarung durch den Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$E_V = 2 \cdot \frac{E_C \cdot E_L}{E_C + E_L} \quad (1)$$

für den Kontakt zwischen Kunststoff-Laufmantel (E_C : Kriechmodul in Abhängigkeit der statischen Belastungsdauer) und Laufbahn bzw. Unterlage (E_L : Elastizitäts- bzw. Kriechmodul der Laufbahn) erfasst werden kann.

Die Krümmungsverhältnisse im Kontaktbereich können in den Hertzschen Formeln durch einen Vergleichskrümmungsradius R_V erfasst werden. Dieser errechnet sich im vorliegenden Fall der konkav profilierten Rolle im Kontakt mit einem Zylinder anhand der Beziehung

$$R_V = \frac{2}{\frac{2}{d_R} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \quad (2)$$

Die für die Hertzschen Formeln benötigten Krümmungsbeiwerte (Abb. 3) sind über den Krümmungsparameter

$$\eta = \cos \theta = \frac{\left| \frac{2}{d_R} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right|}{\frac{2}{d_R} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \quad (3)$$

bestimmbar, der wegen der Betragsstriche im Zähler stets positive Werte annimmt. Besonders zu beachten ist, dass in (2) und (3) alle Krümmungsradien mit positiven Zahlenwerten einzusetzen sind, also auch der Radius r_1 der konkaven Krümmung.

Ergebnisse

Die wesentlichen Erkenntnisse der Untersuchungen sind:

1. Der maximale Kontaktdruck und die Abmessungen der Kontaktfläche sind in den gewählten Parameterbereichen praktisch vom Durchmesser Verhältnis d_N/d_R und damit von der Laufmanteldicke wie auch von der Rollenbreite l unabhängig. Also können die entsprechenden Hertzschen Formeln mit sehr guter Genauigkeit angewendet werden.
2. Die Abplattung zeigt dagegen einen gewissen Einfluss von Laufmanteldicke (Abb. 4) und Rollenbreite (Abb. 5).
3. Der Aussendurchmesser d_A wirkt sich – kaum überraschend – praktisch nicht auf die Resultate aus.

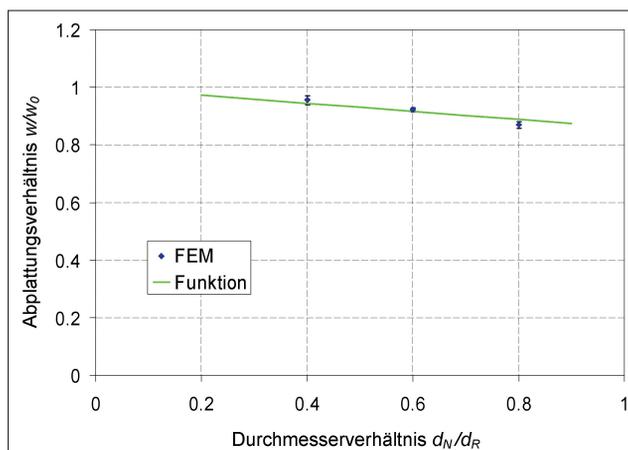


Abb. 4: Abplattung w im Vergleich mit dem theoretischen Resultat w_0 in Funktion des Durchmesser Verhältnisses d_N/d_R [9].

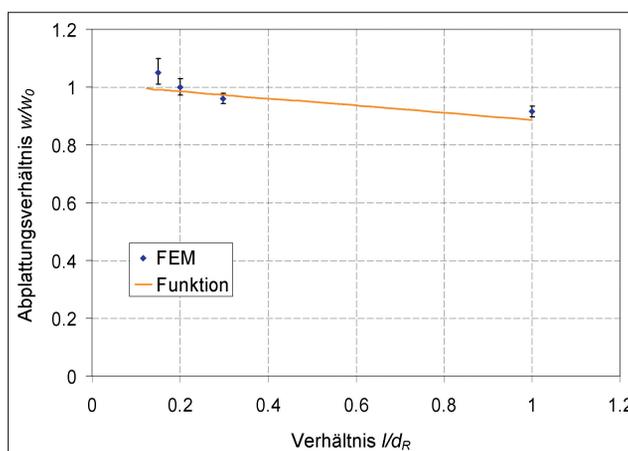


Abb. 5: Abplattung w im Vergleich mit dem theoretischen Resultat w_0 in Funktion des Verhältnisses l/d_R [9].

4. Die grösste positive Dehnung ist proportional zum maximalen Kontaktdruck und umgekehrt proportional zum Kriechmodul des Rollenwerkstoffs. Sie tritt am Rand der Kontaktfläche auf (Abb. 6).
5. Die grösste Vergleichsspannung ist proportional zum maximalen Kontaktdruck und tritt im Innern des Laufmantels auf (Abb. 7).
6. Der Einfluss der Poissonzahl auf die Ergebnisse liegt mit durchschnittlich $\pm 2,5\%$ in vernachlässigbarer Höhe.
7. Die Krümmungsbeiwerte der Hertzschen Formeln können im interessierenden Bereich $0 \leq \eta = \cos \Theta \leq 0,985$ mit guter Übereinstimmung durch Potenzfunktio-

nen angenähert werden (Abb. 3), die sich direkt in die Berechnungsformeln einarbeiten lassen. Die maximale Abweichung beträgt 5% ausser bei $\cos \Theta = 0,985$ mit maximal 7%.

Für die hauptsächlich interessierenden kontaktmechanischen Grössen liessen sich aus den ermittelten Resultaten nachstehende Berechnungsformeln ableiten, wobei die untergeordneten Einflüsse zugunsten nicht allzu komplizierter Ausdrücke vernachlässigt wurden. Deren Gültigkeit beschränkt sich auf die oben angegebenen Parameterbereiche.

● Kontaktfläche

Die Kontaktfläche, die sich unter der radialen Last F zwischen Laufrolle und Laufbahn einstellt, weist einen elliptischen Umriss mit den Halbachsen $a \geq b$ auf. Sie sind je nach den Krümmungsverhältnissen in Quer- oder Umfangsrichtung orientiert. Bei kleinen Werten von $r_2/r_1 < 0,5$ liegt die grössere Halbachse in Umfangsrichtung. Die Halbachsen können mit guter Genauigkeit mit den Beziehungen

$$a \approx \frac{1,1}{(1 - \eta^{0,6})^{0,4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot R_V}{E_V}} \quad (4)$$

$$b \approx 1,1 \cdot (1 - \eta^{0,5})^{0,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot R_V}{E_V}} \quad (5)$$

berechnet werden, die der Theorie von Hertz entsprechen.

● Maximaler Kontaktdruck

Der Kontaktdruck verteilt sich über der Kontaktfläche in Form eines halben Ellipsoids. Er erreicht seinen Grösstwert im theoretischen Berührungspunkt und lässt sich – in Übereinstimmung mit der Hertzschen Theorie – berechnen mit der Formel

$$p_0 \approx 0,388 \cdot (1 - \eta^2)^{0,2} \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \quad (6)$$

● Abplattung

Für die Abplattung, definiert als radiale Verschiebung des Rollenzent-

Verdankung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekts «Konstruieren mit Kunststoffen». Für dessen Förderung danken die Verfasser dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil.

rums unter der Last F (Abb. 2), konnte die Beziehung

$$w \approx 1,23 \cdot (1 - \eta^2)^{0,23} \cdot \sqrt{1 - 0,34 \cdot \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^{1,6}} \cdot \left[0,94 + 0,01 \cdot \left(\frac{l}{d_R}\right)^{-1,4}\right] \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{E_V^2 \cdot R_V}} \quad (7a)$$

herausgearbeitet werden bzw. mit linearisierten Funktionen der Verhältnisse d_N/d_R und l/d_R etwas einfacher

$$w \approx 1,23 \cdot (1 - \eta^2)^{0,23} \cdot \left(1 - 0,14 \cdot \frac{d_N}{d_R}\right) \cdot \left(1,07 - 0,13 \cdot \frac{l}{d_R}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{E_V^2 \cdot R_V}} \quad (7b)$$

Diese kann mit einer maximalen Abweichung von weniger als 10% gegenüber den mit FEM erhaltenen Werten als brauchbarer Kompromiss zwischen den hohen Ansprüchen an die Genauigkeit und an eine einfache Handhabung in der Praxis gelten.

● **Maximale Dehnung**

Die grösste positive Dehnung, die für die Dimensionierung der Rolle als massgebende Grösse beigezogen werden kann, tritt angrenzend an den Rand der Kontaktfläche auf. Sie lässt sich anhand der Beziehung

$$\epsilon_{\max} \approx 0,28 \cdot \frac{p_0}{E_C} \approx 0,11 \cdot (1 - \eta^2)^{0,2} \cdot \frac{1}{E_C} \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \quad (8)$$

berechnen mit dem maximalen Kontaktdruck p_0 (6) und dem Kriechmodul E_C des Laufmantelwerkstoffs.

● **Spannungen**

Der Grösstwert der Vergleichsspannung tritt wie erwartet im Innern des Laufmantels in einem Abstand der Kontaktfläche auf, der in etwa dem halben harmonischen Mittel der Halbachsen a und b der Kontaktellipse entspricht. Mit Anwendung der Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises) [5, 6] ergibt sich

$$\sigma_{V \max} = \sigma_V \left(z \approx \frac{a \cdot b}{a + b}\right) \approx 0,645 \cdot p_0 = 0,25 \cdot (1 - \eta^2)^{0,2} \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \quad (9)$$

Im Vergleich dazu sind – wie bei den bisher untersuchten Rollen – die Spannungen aus der Lochleibung zwischen Nabe und Laufmantel und aus dem relaxierenden Druck zwischen Nabe und Laufmantel auf-

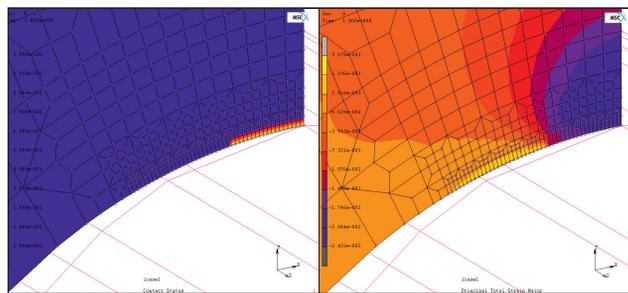


Abb. 6: Kontaktfläche (Contact Status) und Zone der grössten positiven Dehnung (Principal Total Strain Major) am Rand der Kontaktfläche [9].

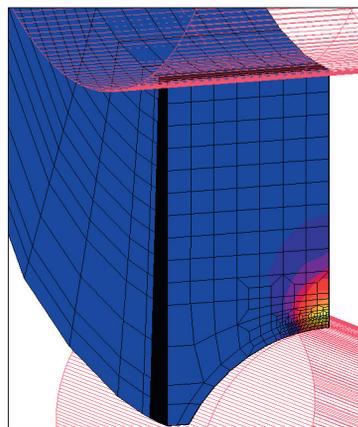


Abb. 7: Zone maximaler Vergleichsspannung (von Mises) im Innern des Laufmantels [9].

grund des Aufpressens bzw. Umspritzens deutlich geringer und müssen nicht in Betracht gezogen werden.

Fazit

Die hier präsentierten Formeln, die die Hertzsche Theorie der Kontaktmechanik auf konkav profilierte Kunststoff-Laufmantelrollen ausweiten, können innerhalb der angegebenen Grenzen relativ einfach und mit vernünftiger Genauigkeit für die Auslegung solcher Rollen angewendet werden. In der Praxis kann in der aufgeführten Reihenfolge der Beziehungen vorgegangen

werden, weitere Grundlagen sind nicht erforderlich.

Die Anwendbarkeit der Formeln beschränkt sich allerdings auf zylindrische, also geradlinige Profile als Unterlage. Unterlagen, die auch in Längsrichtung gekrümmt sind, lassen sich mit den erarbeiteten Beziehungen nicht erfassen. Auch für Seillaufrollen sind sie ungeeignet, da die Umschlingung der Rolle durch das Seil und die Struktur des Seils zu gänzlich andern Kontaktverhältnissen führen. Für solche Gegebenheiten wären weitere Studien erforderlich.

Literatur

[1] Kunz, J.: Kontaktmechanik zylindrischer Kunststoff-Laufmantelrollen. *Kunststoffe-Synthetics* 52(2005)6, S. 19–22.
 [2] Kunz, J., Studer, M.: Zylindrische Laufmantelrolle mit partieller Abstützung. *Kunststoffe-Synthetics* 53(2006)1, S. 18–21.
 [3] Kunz, J., Holzinger, M.: Kunststoffrollen mit dachartigem Laufmantelprofil. *Kunststoffe-Synthetics* 53(2006)11, S. 24–27.
 [4] Kunz, J., Bürzle, W., Studer, M.: Kontaktmechanik balliger Kunststoff-Laufmantelrollen. *SwissPlastics* 29(2007)6, S. 31–34.
 [5] Kunz, J., Studer, M.: Neuartige 2K-Laufrollen und ihre Kontaktmechanik. *SwissPlastics* 30(2008)3, S. 17–20.
 [6] Kunz, J.: Laufrollen. In: Kunz, J., Michaeli, W., Herrlich, N., Land, W. (Hrsg.): *Kunststoffpraxis: Konstruktion*, WEKA Media GmbH Kissing, Aktualisierungsstand April 2008.
 [7] Grothe, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Verlag Berlin, 22. Aufl., 2007.
 [8] Czichos, H., Hennecke, M. (Hrsg.): *Hütte – Das Ingenieurwissen*. Springer Verlag Berlin, 33. Aufl., 2008.
 [9] Kunz, J., Bürzle, W.: *Forschungsprojekt Auslegung von Kunststoff-Laufrollen*. Diverse interne, unveröffentlichte Dokumente. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2008.