

Konstruktionselemente aus Kunststoff

# Kontaktmechanik balliger Kunststoff-Laufmantelrollen

Für Kunststoffrollen mit ballig profiliertem Laufmantel, die statisch belastet sind oder langsam laufen, sind verlässliche Formeln zur Berechnung von Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, Kontaktfläche, Abplattung, Vergleichsspannung und maximaler Dehnung in Funktion der wesentlichen Rollenparameter entwickelt worden. Damit kann auch dieser verbreitet eingesetzte Rollentyp ingenieurmässig ausgelegt werden.

**Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz**, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im MAS-Studiengang Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz

**Dipl.-Ing. Wilfried Bürzle**, ETH Zürich, vormals wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil

**Dipl.-Ing. Mario Studer**, wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil

**iwk**

Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung

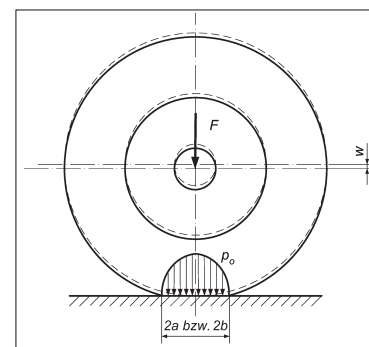
Bekanntlich verbinden Rollen mit einem Laufmantel aus Kunststoff vorteilhafte Betriebseigenschaften wie geringe Geräuschentwicklung, hohe mechanische Dämpfung, gutes Federverhalten und hohe Verschleissfestigkeit mit einer wirtschaftlichen Fertigung. Dies gilt insbesondere dann, wenn sie im Spritzgiessverfahren hergestellt werden [1]. Unter den verschiedenen Rollentypen haben jene mit ballig profiliertem Laufmantel (Abb. 1) nebst der einfachen Entformbarkeit den besonderen Vorteil, dass ihr Betriebsverhalten vergleichsweise tolerant ist gegenüber etwaigen Unebenheiten der Unterlage quer zur Laufrichtung wie auch gegenüber einem allfälligen Verkatzen der Rollenachse.

In der Kontaktmechanik der Laufmantelrollen sind die generell bestimmenden Grössen einerseits die mechanischen Eigenschaften des Kunststoff-Laufmantels und der Unterlage und andererseits die Geo-

metrie der Rolle und der Kontaktflächen zueinander. Für Rollen mit zylindrischem [2, 3] oder mit dachartig profiliertem Laufmantel [4] wurden diese Zusammenhänge in den letzten Jahren untersucht und daraus praxisorientierte Berechnungsformeln erarbeitet. Für Rollen mit balligem Laufmantel ist dagegen noch nicht bekannt, ob und inwieweit die bislang zur Anwendung empfohlene Hertzsche Theorie [5, 6] tatsächlich zutreffende Resultate liefert.

## Problemstellung

Zur Beantwortung dieser Frage wurde nun die Kontaktmechanik von Kunststoff-Laufrollen mit balligem Profil untersucht [7]. Im Vordergrund stand das Ziel, die aus der Hertzschen Theorie abgeleiteten Formeln entweder zu bestätigen oder dort, wo sie zu wenig genaue Resultate liefern, die Berechnungsformeln geeignet zu modifizieren. Dies wie-



**Abb. 2: Grössen der Kontaktmechanik**  
 $a, b$ : Halbachse der Kontaktflächenellipse in Umfangsrichtung [mm]  
 $p_0$ : Maximaler Kontaktdruck [N/mm<sup>2</sup>]  
 $w$ : Abplattung [mm]

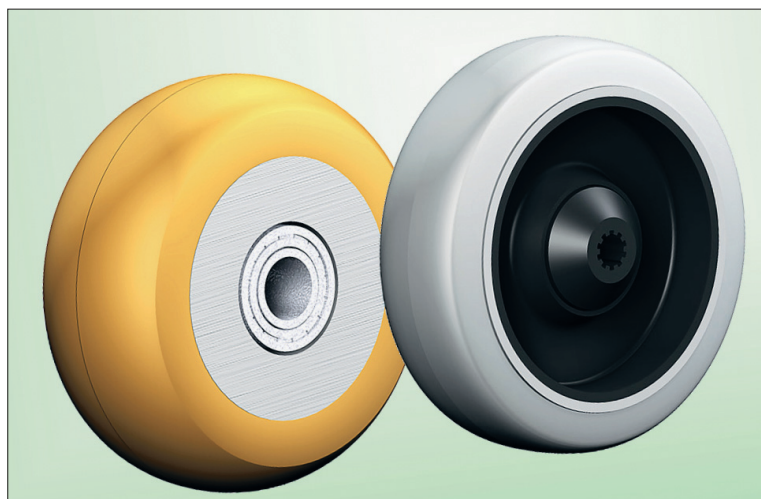
derum unter Beschränkung auf statische oder quasistatische Belastungen, wie sie für die Berechnung der statischen Tragfähigkeit, des Verformungsverhaltens im Stillstand und der Federwirkung bei langsamer Bewegung sowie für die Beurteilung des Anfahrwiderstands von Rollen von Bedeutung sind.

## Vorgehen

Bearbeitet wurde die Problemstellung auf bewährte Weise mittels kombinierten theoretisch-analytischen, experimentellen und rechnerisch-numerischen Untersuchungen. Die wesentlichen Schritte dieses Vorgehens sind:

- Identifikation der massgeblichen Parameter des Problems anhand qualitativer Überlegungen
- Rechnerisch-numerische Analysen mit der Finite Elemente Methode (FEM) unter gezielter Variation der Parameter zwecks Herausarbeitung der geltenden Gesetzmässigkeiten

**Abb. 1: Kunststoffrollen mit balligem Laufmantelprofil (Rollenbau GmbH, A-1230 Wien).**

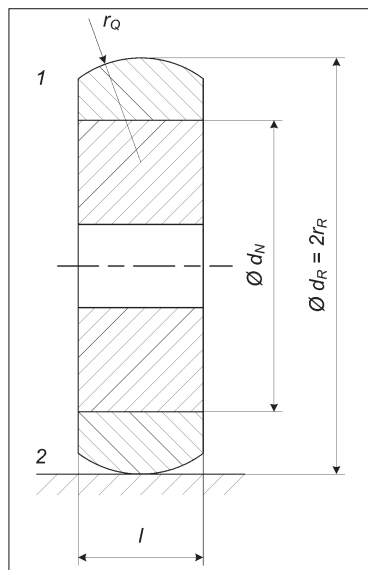


- Experimentelle Bestätigung der Ergebnisse
- Vergleich der Ergebnisse mit den Resultaten aus der Hertzschen Theorie
- Wo erforderlich, Erarbeiten von mathematisch möglichst einfachen, aber hinreichend genauen Berechnungsformeln für den maximalen Kontaktdruck zwischen Rolle und Unterlage, die Abmessungen der entstehenden Kontaktfläche, die Rollenabplattung, also die Verschiebung des Rollenzentrums in Richtung Unterlage (Abb. 2), sowie für die maximale Dehnung.

**Voraussetzungen und Idealisierungen**

Die Überlegungen basieren auf folgenden Voraussetzungen und Idealisierungen:

- a) der Laufmantel ist von balliger Form mit in weiten Grenzen variierbarem Radienverhältnis (Abb. 3);
- b) Laufmantel und Nabe sind von gleicher achsialer Ausdehnung (Rollbreite);
- c) zwischen Nabe und Laufmantel besteht kein Stoffschluss;



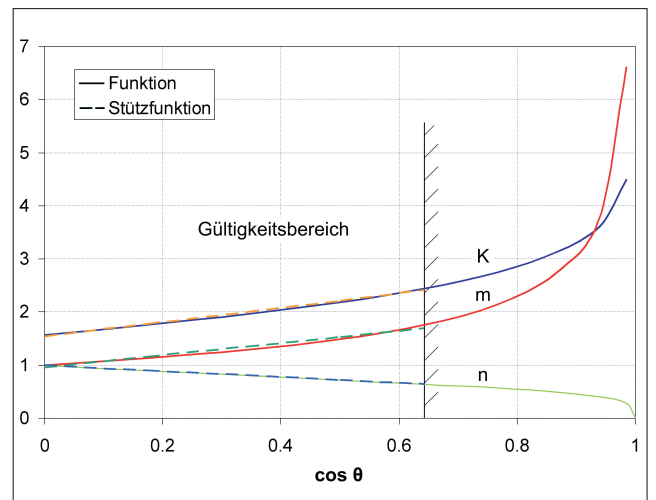
**Abb. 3: Geometrie der Laufmantelrollen mit balligem Profil**

- 1: Laufmantel mit balligem Profil
- 2: Unterlage (Laufbahn)
- $d_R$ : Rollendurchmesser [mm]
- $d_N$ : Nabendurchmesser [mm]
- $r_R$ : Krümmungsradius in Umfangsrichtung [mm]
- $r_Q$ : Krümmungsradius in Querrichtung [mm]
- $l$ : Rollenbreite [mm]

- d) der Kunststoff des Laufmantels verhält sich linear viskoelastisch, das heisst die zeitabhängige Werkstoffsteifigkeit, beschrieben durch den Kriechmodul, ist keine Funktion der Last und damit gilt das Boltzmannsche Zeit-Verformungs-Superpositionsprinzip [1];
- e) allfällige Vorspannungen des Laufmantels durch Aufpressen bzw. Umspritzen lassen sich linear überlagern;
- f) die Nabe besteht aus einem Werkstoff vergleichsweise hoher Steifigkeit, so dass ihre Verformung vernachlässigt werden kann;
- g) die Belastung besteht aus einer statischen oder quasistatischen Radiallast im Zentrum der Nabe;
- h) die Rolle wirkt als reine Laufrolle, das heisst es wirken keine Tangentialkräfte in der Berührungsfläche;
- i) die Unterlage ist eben und wird als linear elastischer bzw. linear viskoelastischer Halbraum betrachtet;
- k) die Rollachse ist parallel zur Unterlage ausgerichtet, das heisst Verkanten wird ausgeschlossen.

**Grundsätzliche Überlegungen**

Rollen mit balliger Lauffläche weisen eine zweifache, das heisst räumliche Krümmung auf (Abb. 3): Nebst dem geometriebedingten Krümmungsradius  $r_R$  in Umfangsrichtung hat auch ihre Kontur im Querschnitt eine Krümmung vom Radius  $r_Q$ . Dieser ist im Minimum gleich der halben Rollenbreite  $l$ , kann aber ansonsten kleiner oder grösser als  $r_R$  sein. Solche Rollen berühren ihre Unterlage theoretisch, das heisst ohne Verformung der Kontaktkörper, lediglich in einem Punkt. Bei theoretischer Punktberührung kann im Prinzip direkt die Hertzsche Theorie angewendet werden, da diese in der Kontaktzone räumliche Krümmungen voraussetzt. Es ist aber nicht auszuschliessen, dass das Durchmesserverhältnis  $d_N/d_R$  von Nabe und Rolle die zu untersuchenden kontaktmechanischen Grössen mehr oder weniger stark beeinflusst, insbesondere bei relativ dünnem Laufmantel, und damit die Hertzschen Formeln entsprechend modifiziert werden müssen.



**Abb. 4: Krümmungsbewerte für die Hertzschen Formeln, linearisiert im Bereich  $0 \leq \cos \theta \leq 0,65$  [7].**

ten. Damit stellt sich konkret die Aufgabe, den maximalen Kontaktdruck, die Kontaktflächenabmessungen, die Abplattung, die maximale Vergleichsspannung und die maximale Dehnung auf allfällige Abhängigkeiten vom Durchmesserverhältnis  $d_N/d_R$  hin zu untersuchen.

Da gemäss i) eine ebene Unterlage vorausgesetzt wird, sind die lokalen Krümmungsverhältnisse im Kontaktbereich relativ einfach. Deshalb sollte auch versucht werden, die in komplexer Weise von diesen Krümmungsverhältnissen abhängigen Beiwerte der Hertzschen Formeln [5, 6] in möglichst einfacher Form zu erfassen, um so zu bequem handhabbaren Berechnungsformeln zu gelangen.

**Untersuchungen**

Die erforderlichen Parametervariationen wurden in bewährter Weise mittels FEM-Rechnungen durchgeführt. Deren Verlässlichkeit kann aufgrund der Erfahrungen aus den bisherigen Untersuchungen als gegeben gelten. Dies rechtfertigt die Beschränkung auf einige wenige Vergleichsmessungen anhand ausgewählter Geometrien.

Untersucht wurden Rollen aus POM C natur Tecaform (Kundert AG, Jona) mit einem Rollendurchmesser  $d_R = 100$  mm, einer Breite  $l = 30$  mm und abgestuften Nabendurchmessern  $d_N = 40, 60, 80$  mm. Die Erfassung anderer Grössen ist durch die dimensionslose Auswertung gewährleistet. Das Radiusverhältnis

**Dank**

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekts «Grundlagen für die Auslegung von Kunststoffkonstruktionen». Für dessen Förderung danken die Verfasser der Gebert RUF Stiftung, Basel, und dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil.

$r_Q/r_R$  erstreckte sich von 0,3 bis 2,0. Der in der Auswertung erforderliche Kriechmodul wurde bereits früher mit  $E_C = 3000 \text{ N/mm}^2$  bestimmt, und die Poissonzahl wurde in allen FEM-Rechnungen mit  $\mu = 0,3$  eingesetzt. Als Unterlage (Laufbahn) wurde Stahl angenommen. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit, indem die Steifigkeit der Werkstoffpaarung durch den Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$E_V = 2 \cdot \frac{E_C \cdot E_L}{E_C + E_L} \quad (1)$$

für den Kontakt zwischen Kunststoff-Laufmantel ( $E_C$ : Kriechmodul in Abhängigkeit der statischen Belastungsdauer) und Laufbahn bzw. Unterlage ( $E_L$ : Elastizitätsmodul) erfasst wird.

Die Krümmungsverhältnisse im Kontaktbereich werden in den Hertzschen Formeln, angewendet auf den hier vorliegenden Fall, durch das harmonische Mittel der beiden Krümmungsradien beschrieben als Vergleichskrümmungsradius

$$R_V = 2 \cdot \frac{r_Q \cdot r_R}{r_Q + r_R} \quad (2)$$

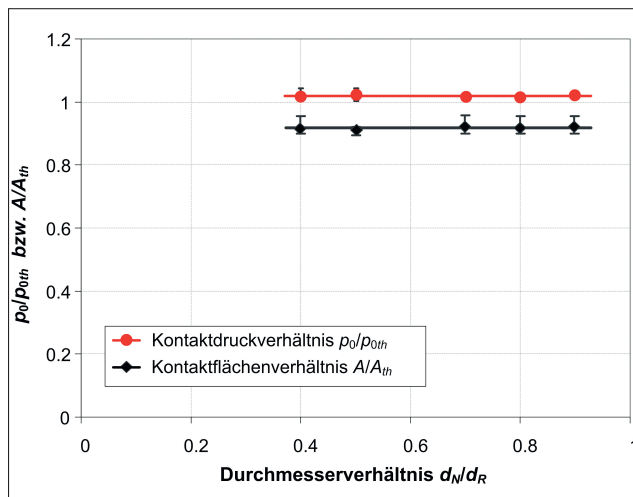
Zur Bestimmung der Krümmungsbeiwerte für die Hertzschen Formeln (Abb. 4) dient die wegen der Betragstriche unabhängig vom Verhältnis der beiden Krümmungsradien zueinander stets positive Hilfsgrösse

$$\eta = \cos \theta = \left| \frac{r_Q - r_R}{r_Q + r_R} \right| \quad (3)$$

### Ergebnisse

Die Untersuchungen zeitigten interessante Erkenntnisse:

1. Der maximale Kontaktdruck und die Abmessungen der Kontaktfläche sind im untersuchten Bereich praktisch von der Laufmanteldicke unabhängig (Abb. 5), und die Hertzschen Formeln können mit sehr guter Genauigkeit angewendet werden;



**Abb. 5: Vergleich des maximalen Kontaktdrucks  $p_0$  mit dem theoretischen Wert  $p_{0th}$  und der Kontaktfläche  $A$  mit dem theoretischen Wert  $A_{th}$  in Funktion des Durchmesserverhältnisses  $d_N/d_R$  [7].**

2. Die Abplattung dagegen wird von der Laufmanteldicke merklich beeinflusst (Abb. 6);

3. Die Rollenbreite hat wie erwartet keinen nennenswerten Einfluss auf die Ergebnisse;

4. Die grösste maximale Dehnung tritt in der Regel im Innern des Laufmantels auf (Abb. 8);

5. Abweichungen von der eingesetzten Poissonzahl  $\mu = 0,3$  sind, mit Ausnahme der maximalen Dehnung (Abb. 7), von vernachlässigbar geringem Einfluss;

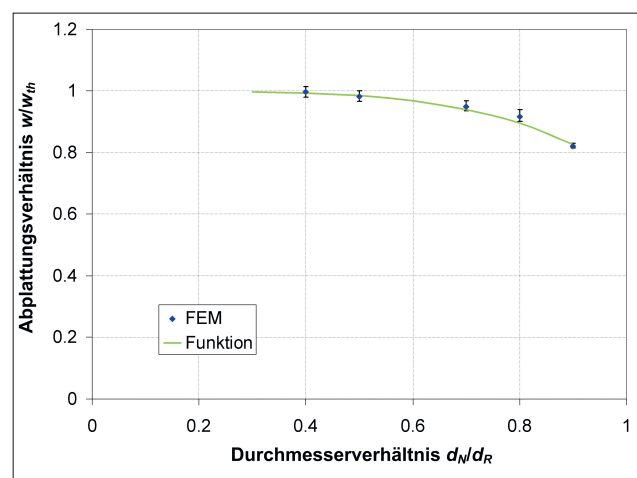
6. Die Krümmungsbeiwerte der Hertzschen Formeln können im interessierenden Bereich  $0 \leq \eta = \cos \theta \leq 0,65$  mit guter Übereinstimmung (maximale Abweichung 6%) durch lineare Funktionen angenähert werden (Abb. 4).

Die nachstehenden Berechnungsformeln gelten in den Bereichen  $0,4 \leq d_N/d_R \leq 0,8$ ;  $0,3 \leq r_Q/r_R \leq 2,0$ ;  $100 \text{ N/mm}^2 \leq E_C \leq 5000 \text{ N/mm}^2$ .

#### • Kontaktfläche

Unter der radialen Last  $F$  stellt sich zwischen Laufrolle und Laufbahn eine Kontaktfläche mit elliptischem Umriss ein. Die Halbachsen  $a \geq b$  dieser Kontaktellipse sind je nach dem Radiusverhältnis  $r_Q/r_R$  in Umfangs- oder Querrichtung orientiert. Sie

**Abb. 6: Abplattung  $w$  im Vergleich mit dem theoretischen Resultat  $w_{th}$  in Funktion des Durchmesserverhältnisses  $d_N/d_R$  [7].**



sind bestimmbar durch die Beziehungen

$$a \approx (1,11 + 1,16 \cdot \eta) \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot R_V}{E_V}} \quad (4)$$

$$b \approx (1,11 - 0,63 \cdot \eta) \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot R_V}{E_V}} \quad (5)$$

Die mit der FEM bestimmte Kontaktfläche  $A$  ist als Folge der Diskretisierung durch das Elemente-Netz etwas geringer als die effektive Fläche, die damit recht gut der theoretischen Kontaktfläche  $A_{th} = \pi \cdot a \cdot b$  entsprechen dürfte (Abb. 5).

#### • Maximaler Kontaktdruck

Der Kontaktdruck verteilt sich über der Kontaktfläche in Form eines halben Ellipsoids mit dem Grösstwert im theoretischen Berührungspunkt, nämlich

$$p_0 \approx (0,388 - 0,05 \cdot \eta) \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \approx 0,37 \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \quad (6)$$

#### • Abplattung

Die Abplattung ist definiert als die radiale Verschiebung des Rollen-zentrums unter der Last  $F$  (Abb. 3). Sie kann berechnet werden mit der Beziehung

$$w \approx (1,23 - 0,17 \cdot \eta) \cdot \sqrt{1 - 0,48 \cdot \left(\frac{d_N}{d_R}\right)^4} \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{E_V^2 \cdot R_V}} \quad (7a)$$

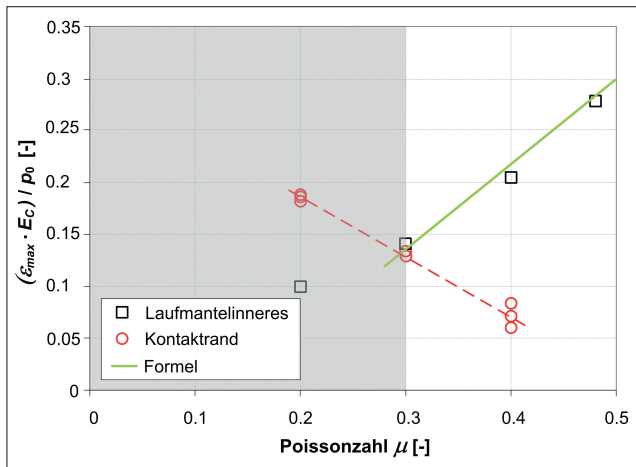


Abb. 7: Einfluss des Querkontraktionsverhaltens (Poissonzahl  $\mu$ ) auf die maximale Dehnung im Laufmantel [7].

beziehungsweise als linearisierte Funktion von  $d_N/d_R$

$$w \approx (1,23 - 0,17 \cdot \eta) \cdot \left( 1,1 - 0,23 \cdot \frac{d_N}{d_R} \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{E_V^2 \cdot R_V}} \quad (7b)$$

• Maximale Dehnung

Für die Dimensionierung der Rolle ist die grösste positive Dehnung von massgebender Bedeutung. Sie ist deutlich vom Querkontraktionsverhalten des Laufmantelwerkstoffs abhängig (Abb. 7). Das absolute Dehnungsmaximum stellt sich für technisch realistische Werte der Poissonzahl  $0,3 \leq \mu \leq 0,5$  in einem grösseren Bereich im Inneren des Laufmantels ein (Abb. 8) und kann mit der Beziehung

$$\epsilon_{\max} \approx (0,82 \cdot \mu - 0,11) \cdot \frac{p_0}{E_C} \quad (8)$$

berechnet werden. Darin sind  $p_0$  der maximale Kontaktdruck (6) und  $E_C$  der Kriechmodul des Laufmantel-

werkstoffs. Das zweite Maximum tritt relativ konzentriert in der Laufmantel-Oberfläche am Kontaktflächenrand auf (Abb. 8). Diese Dehnung überwiegt lediglich bei  $\mu \leq 0,3$ , was höchst selten zutreffen dürfte.

• Spannungen

Der Grösstwert der Vergleichsspannung tritt wie erwartet im Innern des Laufmantels unterhalb der Kontaktfläche auf. Der Abstand entspricht recht gut dem halben harmonischen Mittel der Halbachsen  $a$  und  $b$  der Kontaktellipse. Nach der Schubspannungshypothese [5, 6] gilt

$$\sigma_V \max = \sigma_V \left( z \approx \frac{a \cdot b}{a + b} \right) \approx 0,62 \cdot p_0 \approx (0,24 + 0,03 \cdot \eta) \cdot \sqrt[3]{\frac{F \cdot E_V^2}{R_V^2}} \quad (9)$$

Die Spannungen aus der Lochleibung zwischen Nabe und Laufmantel und aus dem relaxierenden Druck zwischen Nabe und Laufmantel aufgrund des Aufpressens bzw. Umspritzens fallen in aller Regel geringer aus und können daher ausser Betracht bleiben.

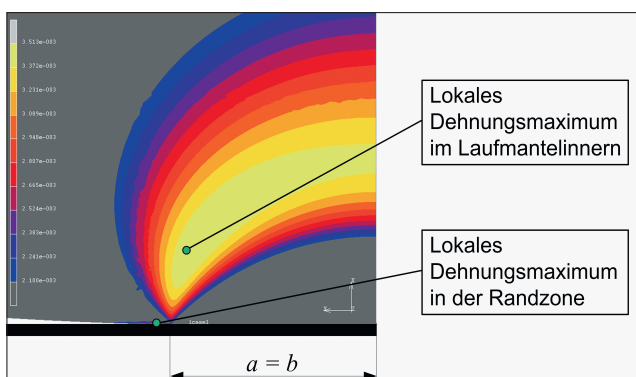


Abb. 8: Zonen maximaler Dehnung im Innern des Laufmantels und am Rand der Kontaktfläche, dargestellt am Beispiel einer kugelförmigen Oberfläche [7].

Abschliessende Gedanken

Die hier vorgestellten Berechnungsformeln beschreiben die wesentlichen kontaktmechanischen Grössen innerhalb der angegebenen Gültigkeitsbereiche in einfacher, praktikabler Form und gleichwohl guter Genauigkeit für die Auslegung, allerdings unter Beschränkung auf Rollen mit balligem Kunststoff-Laufmantel auf ebener Unterlage. Wenn auch die Unterlage ein- oder zweiseitig gekrümmt sein sollte, so gelten wohl die Erkenntnisse 1 bis 5 qualitativ, die Beziehungen (2) bis (9) sind aber nicht anwendbar. In solchen Fällen ist der etwas aufwändigere Lösungsweg insbesondere zur Bestimmung der von den Krümmungsverhältnissen abhängigen Hertzschen Beiwerte [5, 6] unumgänglich. Mit ihr sind aber die Abplattung und die maximale Dehnung mit Berücksichtigung der Laufmanteldicke bzw. des Durchmesserverhältnisses  $d_N/d_R$  nicht erhältlich. Deren Bestimmung würde im Einzelfall gezielte FEM-Analysen erfordern.

Literatur

[1] Kunz J.: Laufrollen. In: Kunz, J., Michaeli, W., Herrlich, N., Land, W. (Hrsg.): Kunststoffpraxis: Konstruktion, WEKA Media GmbH Kissing, Aktualisierungsstand April 2007  
 [2] Kunz, J.: Kontaktmechanik zylindrischer Kunststoff-Laufmantelrollen. Kunststoffe-Synthetics 52(2005)6, S. 19–22  
 [3] Kunz, J., Studer, M.: Zylindrische Laufmantelrolle mit partieller Abstützung. Kunststoffe-Synthetics 53(2006)1, S. 18–21  
 [4] Kunz, J., Holzinger, M.: Kunststoffrollen mit dachartigem Laufmantelprofil. Kunststoffe-Synthetics 53(2006)11, S. 24–27  
 [5] Grothe, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer Verlag Berlin, 21. Aufl., 2005  
 [6] Czichos, H., Hennecke, M. (Hrsg.): Hütte – Das Ingenieurwissen. Springer Verlag Berlin, 32. Aufl., 2004  
 [7] Kunz, J., Bürzle, W., Studer, M.: Forschungsprojekt-Auslegung von Kunststoff-Laufrollen. Diverse interne, unveröffentlichte Dokumente. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2007