

Auslegung von Kunststoffkonstruktionen

# Bauteil-Wärmespannungen realistisch berechnen

Ein neuer Ansatz ermöglicht es, Wärmespannungen in Kunststoffen innerhalb der getroffenen Voraussetzungen mit zufriedenstellender Übereinstimmung mit Messresultaten zu berechnen. Der Ansatz berücksichtigt auf vergleichsweise einfache Weise sowohl das viskoelastische Verhalten als auch die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffkennwerte als Versuch, eine Lücke unter den bisherigen Berechnungsmöglichkeiten zu schliessen.

**Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz**, Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung (IWK) an der HSR Hochschule für Technik Rapperswil, Dozent für Berechnen und Gestalten von Kunststoffteilen im MAS-Studiengang Kunststofftechnik an der Hochschule für Technik der FH Nordwestschweiz

**Dipl.-Ing. Fabian Furrer**, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai/China, vormals wissenschaftlicher Mitarbeiter am IWK Rapperswil

**iwk**  
Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung

Wärmespannungen entstehen in einem Bauteil dadurch, dass die von Temperaturänderungen hervorgerufenen Wärmedehnungen äusserlich oder innerlich behindert resp. verhindert werden. Sie hängen von der Steifigkeit des Werkstoffs und dessen thermischem Verhalten sowie von der Differenz  $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$  zwischen Beginn und Ende der Temperaturänderung ab.

Im einfachsten Fall werden die relevanten Werkstoffeigenschaften durch Konstanten beschrieben, nämlich den Elastizitätsmodul  $E$  und die lineare Wärmedehnzahl  $\alpha$ . Bei einachsiger Verhinderung der Wärmedehnung resultiert dann für die Wärmespannung die bekannte Beziehung

$$\sigma_{\vartheta} \approx -E \cdot \alpha \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = -E \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta \quad (1)$$

Bei Kunststoffen besteht die Problematik indessen darin, dass Elastizitätsmodul und Wärmedehnzahl nicht konstant sind und damit Gleichung (1) in dieser Form nicht benutzt werden kann.

Infolge der Viskoelastizität beginnen Wärmespannungen in viskoelastischen Materialien bereits während ihres Entstehens zu relaxieren, da die Werkstoffsteifigkeit mit zunehmender Belastungsdauer stetig abnimmt. Damit wird die Wärmespannung auch zu einer Funktion der Geschwindigkeit der Temperaturänderung. Bei konstanter Spannung wird die Steifigkeit anstelle des Elastizitätsmoduls  $E$  durch den zeitabhängigen Kriechmodul  $E_c$  ausgedrückt, bei konstan-

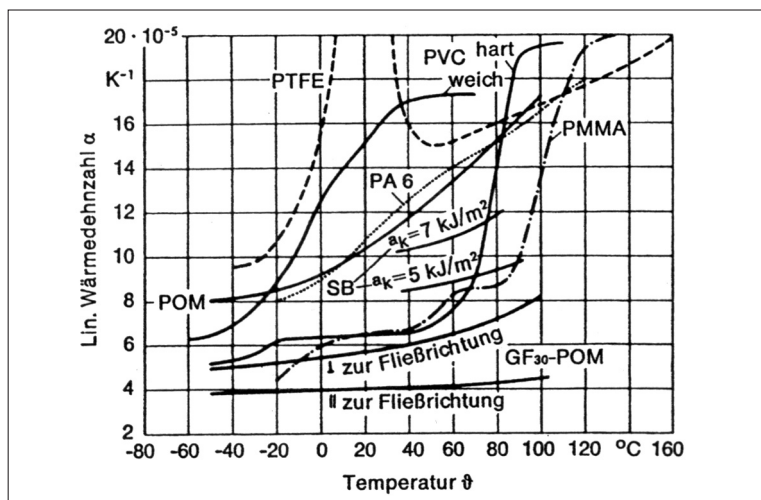


Abb. 1: Wärmedehnzahlen von Thermoplasten in Funktion der Temperatur [1].

ter Dehnung durch den ebenfalls zeitabhängigen Relaxationsmodul  $E_R$ . Diese beiden Moduln, die bei Dehnungen im reversiblen Verformungsbereich praktisch die gleiche Grösse aufweisen, sind zudem von der jeweiligen Temperatur des Werkstoffs abhängig, genauso wie die Wärmedehnzahl (Abb. 1). Diese Abhängigkeiten lassen sich zwar in der Verallgemeinerung von (1) zu

$$\sigma_{\vartheta} = - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} E[t, \vartheta(t)] \cdot \alpha[\vartheta(t)] \cdot d\vartheta \quad (2)$$

mathematisch darstellen, aber nicht ganz einfach berechnen.

## Stand der Technik

Die Tatsache, dass Wärmespannungen in viskoelastischen Materialien bereits während ihres Entstehens relaxieren, und die Temperaturabhängigkeit der Kennwerte stellen sich ei-

ner einfachen Berechnung entgegen. Oberbach [2] wies auf die Schwierigkeiten hin, die durch die Zeitabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und die sich daraus ergebende Relaxation der Wärmespannungen entstehen. Er folgerte, dass eine Berechnung von Wärmespannungen, die durch Temperaturänderungen bei behinderter Verformung in Kunststoffen entstehen, praktisch nicht möglich sei. Es sei deshalb sinnvoll, sie für bestimmte Grundbeanspruchungen experimentell zu ermitteln. Aufgrund eigener Versuchsergebnisse zeigte Oberbach zudem auf, dass die Wärmespannungen beim Erwärmen und beim Abkühlen im gleichen Temperaturintervall unterschiedlich verlaufen und verschieden gross sind (Abb. 2). Diese Erkenntnisse gelten bis heute als Stand der Technik [3, 4].

So überrascht es nicht, dass für die Berechnung von Wärmespan-

nungen in Kunststoffen bisher lediglich einfachste Näherungsmodelle bekannt geworden sind [5 – 8], die aber den geschilderten Zusammenhängen nicht ausreichend gerecht werden.

**Problemstellung**

Aus den vorgenannten Feststellungen ergab sich das Ziel, in einem Projekt [9] ein Rechenmodell für die Berechnung von Wärmespannungen in Kunststoffen bei äusserlich veränderter Wärmedehnung zu entwickeln, das zu realitätsnahen Ergebnissen führt und dennoch einfach gehandhabt werden kann.

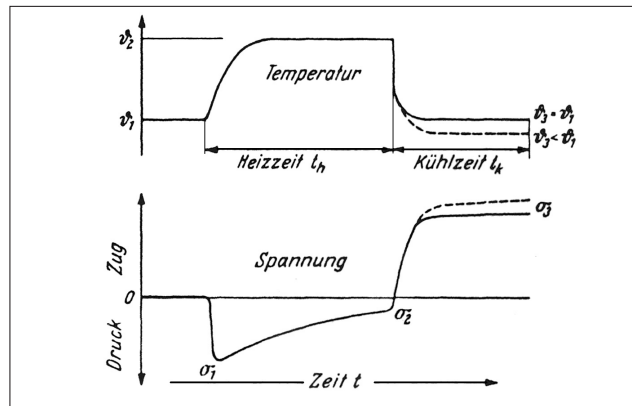
Dieses Rechenmodell sollte in erster Linie praxistauglich sein, das heisst

- 1) sich möglichst nah an die bekannteste einfache Berechnungsformel (1) anlehnen,
- 2) die Temperaturabhängigkeit der relevanten Werkstoffeigenschaften berücksichtigen,
- 3) die Relaxation der beim Erwärmen und beim Abkühlen sich aufbauenden Wärmespannungen erfassen,
- 4) mit üblicherweise verfügbaren Werkstoffkennwerten auskommen, zum Beispiel aus verbreiteten Werkstoff-Datenbanken [10] oder aus Fachbüchern [11, 12],
- 5) einfach anwendbar sein, also mit einfachen Rechenhilfsmitteln oder gar ohne gelöst werden können,
- 6) möglichst durch experimentelle Ergebnisse abgestützt sein.

Zur Lösung dieser Aufgabe erwies sich ein pragmatisches Vorgehen mit sinnvoller Kombination theoretisch-analytischer, experimenteller und rechnerisch-numerischer Untersuchungen als zweckmässig. Dabei konnte auf die Ergebnisse zahlreicher Arbeiten zu Teilaspekten der Problemstellung Wärmespannungen in Kunststoffen [13] aufgebaut werden.

**Einfaches Rechenmodell**

Ein praxistauglicher Ansatz zur Lösung der gestellten Aufgabe übernimmt formal die Struktur der allgemein bekannten Formel (1) und ist so weiterzuentwickeln, dass die erkannten Abhängigkeiten der Wär-



**Abb. 2: Schematischer Verlauf von Temperatur und Spannung beim Temperatur-Wechseltest [2].**

mespannungen von Zeit und Temperatur mit erfasst werden. Dementsprechend hat der gewählte Ansatz die Form

$$\sigma_{\vartheta} \approx -E_C(t^*, \vartheta^*) \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta \quad (3)$$

mit  $t^*$  und  $\vartheta^*$  als massgebenden Grössen von Zeit und Temperatur für die Bestimmung des einzusetzenden Kriechmoduls  $E_C$ . Nun besteht die Aufgabe darin, für  $t^*$  und  $\vartheta^*$  Gesetzmässigkeiten zu finden, die bei Anwendung von Gleichung (3) zu realistischen Spannungswerten führen. Für  $\vartheta^*$  bedeutet dies, dass auch die unterschiedlich hohen Spannungswerte beim Erwärmen und beim Abkühlen mit erfasst werden, und für  $t^*$  ist eine Korrelation mit den Kenngrössen des Erwärms- bzw. Abkühlverhaltens herauszuarbeiten.

Da für die Praxis vor allem die maximalen Wärmespannungen interessieren, zielt dieser Ansatz (3) auf die Höchstwerte in den Wärmespannungsverläufen in Funktion der Zeit beim Erwärmen und beim Abkühlen (Abb. 2). Hohe Wärmespannungen stellen sich bei sehr schneller Temperaturänderung ein, vorzugsweise bei schockartiger Kontaktwärmerung mittels eines Mediums, das einen schnellen Wärmeübergang ermöglicht wie beispielsweise Wasser. Indem die Lösung auf diese extremen Verhältnisse ausgerichtet wird, kann sie als realistische obere Schranke für die in Wirklichkeit auftretenden Wärmespannungen betrachtet werden.

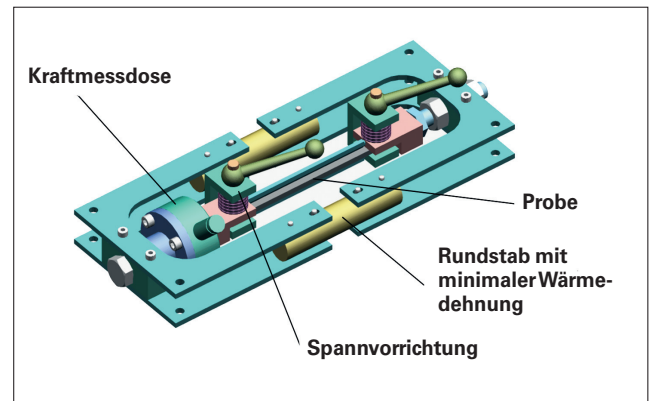
Gemäss den Anforderungen der Problemstellung sollen Werkstoff-

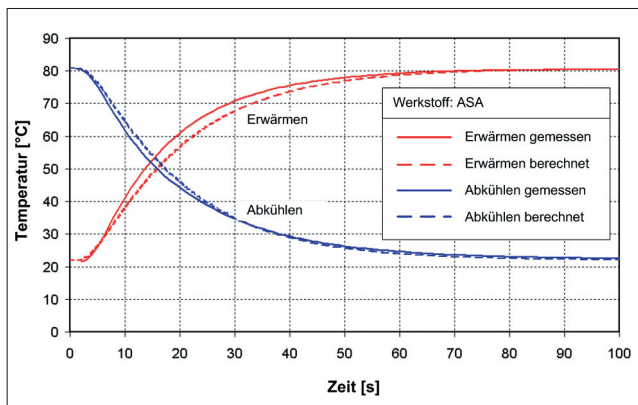
kennwerte verwendet werden können, die üblicherweise in Datenbanken oder sonstwie dokumentiert sind. Dementsprechend wird von der linearen Wärmedehnzahl  $a$  bei Raumtemperatur ausgegangen, obwohl dies physikalisch nicht zutreffend ist. Physikalisch richtig wäre es auch, als Mass für die temperatur- und zeitabhängige Steifigkeit des Kunststoffmaterials in (3) den Relaxationsmodul  $E_R$  einzusetzen. Da dieser aber in den Datenbanken nicht enthalten ist und zudem bei Dehnungen im reversiblen Verformungsbereich praktisch die gleiche Grösse aufweist wie der Kriechmodul  $E_C$ , wird er üblicherweise und ohne merklichen Verlust an Genauigkeit durch letzteren ersetzt. Dies bedeutet aber, dass der Kriechmodul in Funktion von Zeit und Temperatur verfügbar sein muss, sei es in relevanten isochronen und isothermen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen oder in Kriechkurven aus Datenbanken. Allenfalls sind die Abhängigkeiten von Zeit und Temperatur durch Inter- bzw. Extrapolation zu ermitteln. Hiefür hat sich die Interpolationsformel

$$E_C(t^*, \vartheta^*) \approx E(\vartheta_R) \cdot a_0^{\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_R} - 1\right)} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot (1 - c_C) \cdot \log_{10} \left( \frac{t^*}{t_0} \right) \right] \quad (4)$$

mit den Werkstoffkennwerten  $a_0$ , Kurzzeit-Elastizitätsmodul  $E$  und Kriechbeständigkeit  $c_C = E_C(10^3 \text{ h})/E_C(1 \text{ h})$  sowie der Raumtemperatur  $\vartheta_R \approx 23^\circ\text{C}$  und  $t_0 = 1 \text{ h}$  als Bezugsgrössen als gut geeignet erwiesen [14, 15, 16].

**Abb. 3: Messeinrichtung zur experimentellen Bestimmung der Wärmespannungen [9].**





**Abb. 4: Vergleich der gemessenen mit den berechneten Temperaturverläufen in Probenmitte bei ASA (Luran S 757 R, BASF) [9].**

**Experimentelle Untersuchungen**

In den experimentellen Untersuchungen waren zum einen der Elastizitäts- und der Kriechmodul sowie die Wärmedehnzahl als erforderliche Werkstoffkennwerte zu verifizieren, soweit sie der Literatur entnommen werden konnten, bzw. zu bestimmen, wenn sie nicht verfügbar waren. Andererseits mussten zur Konkretisierung von Ansatz (3) die Verläufe von Proben temperatur und Wärmespannungen gemessen werden.

Wo keine geeigneten Messeinrichtungen zur Verfügung standen, wurden solche im Rahmen des Projekts konzipiert, gebaut und getestet, so vor allem ein Versuchsaufbau zur Messung der Wärmespannungen, im Wesentlichen bestehend aus einem Messrahmen (Abb. 3) mit Kraftmessdose und je einem Wasserbad für die Anfangs- und die Endtemperatur. Eine Umwälzpumpe im Wasserbad sorgte für einen Wärmeübergang mit erzwungener Konvektion. Geometrie und Werkstoffe des Messrahmens wurden so gewählt, dass der Messfehler durch dessen eigene Wärmedehnung auf rund 1% begrenzt bleibt. Die Messungen wurden unter Beachtung der geltenden Normen im Temperaturbereich von 20 °C (Raumtemperatur) bis 80 °C mit Zwischenwerten bei 40 °C und 60 °C durchgeführt.

Untersucht wurde eine Auswahl von verbreitet angewendeten Standard- oder Konstruktionskunststoffen, nämlich je vier teilkristalline (PE-HD, PP, PBT, POM) und amorphe Thermoplaste (ASA, ABS, PC, SB).

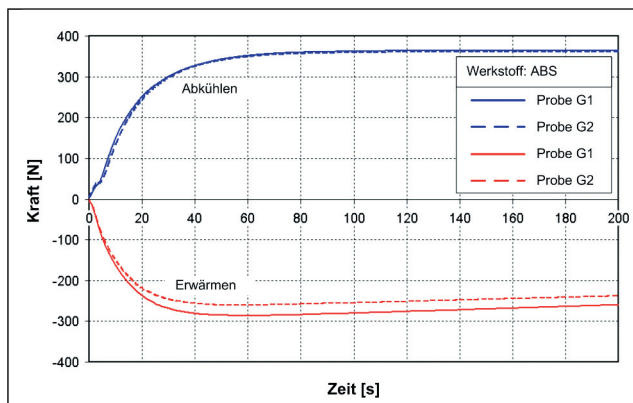
PC und SB wurden nicht für die Entwicklung der Berechnungsformel verwendet, sondern für die abschliessenden Kontrolluntersuchungen reserviert. Als Proben dienten Schulterstäbe, die von der Geberit Produktions AG, 8645 Jona, zur Verfügung gestellt wurden. An sich interessante Werkstoffe wie Polyamid 6 und Polyamid 66 wurden wegen ihrer starken Neigung zur Wasseraufnahme nicht in die Untersuchung einbezogen, da die Proben durch Eintauchen in Wasser der jeweils gewünschten Temperatur erwärmt bzw. abgekühlt wurden.

**Ergebnisse**

Bei den untersuchten Erwärmungs- und Abkühlvorgängen ergab sich eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretisch-analytisch [17], experimentell und FEM-numerisch ermittelten Temperaturverläufen (Abb. 4). Mittels FEM konnte vor allem der Einfluss der endlichen Probenabmessungen einbezogen werden. Für die Wärmespannungen infolge äusserlich unterdrückter Verformung interessiert primär der zeitliche Verlauf der über die Proben dicke gemittelten Proben temperatur. Es zeigte sich, dass er zwischen Anfangs- und Endtemperatur  $\vartheta_1$  bzw.  $\vartheta_2$  sehr gut durch

$$\vartheta(t) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{q\tau}} \right) \tag{5}$$

**Abb. 5: Gemessene Kraftverläufe beim Erwärmen und Abkühlen um einen Temperatur sprung von 60 °C am Beispiel von ABS (Magnum 8391, Dow) [9].**



beschrieben werden kann. Darin sind  $q \approx 0,7$  ein Faktor zur Anpassung der unendlich ausgedehnten Platte an die endlichen Probenabmessungen und  $\tau$  die Zeitkonstante des Wär-

meübergangs. Diese stellt die Zeit dar, zu der zwei Drittel der Temperaturänderung erreicht sind. Sie kann in Abhängigkeit der physikalisch-thermischen Werkstoffeigenschaften recht gut durch die theoretisch entwickelbare Formel

$$\tau = \frac{c_p \cdot \rho \cdot d^2}{4 \cdot \lambda} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3,2}{\frac{\alpha_g \cdot d}{\lambda} + 2,5} \right)^{-2} \tag{6}$$

angenähert werden. Hierin sind  $d$  die Probendicke,  $c_p$  die spezielle Wärmekapazität,  $\rho$  die Dichte,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $\alpha_g$  der Wärmeübergangskoeffizient. Letzterer wurde für den hier zutreffenden Wärmeübergang zwischen Wasser und Kunststoff bei erzwungener Konvektion experimentell bestimmt mit dem Wert  $\alpha_g \approx 850$  W/m<sup>2</sup>·K.

Die Reproduzierbarkeit der Messresultate, insbesondere auch der Kraft- bzw. Spannungsverläufe, war sehr zufriedenstellend (Abb. 5). Diese wurden zur Bestimmung von  $t^*$  und  $\vartheta^*$  als massgebenden Grössen von Zeit und Temperatur in (3) ausgewertet.

Zwischen der Zeitkonstanten (6) und der massgebenden Zeit ergaben sich charakteristische Korrelationen für das Erwärmen mit

$$t^* \approx 3 \cdot \tau \tag{7}$$

und für das Abkühlen

$$t^* \approx 6 \cdot \tau \tag{8}$$

Für die massgebende Temperatur in (3) stellte sich

$$\vartheta^* \approx \frac{1}{4} \cdot (\vartheta_{\max} + \vartheta_1 + 2 \cdot \vartheta_2) \tag{9}$$

als optimal heraus, worin  $\vartheta_{\max}$  die Höchsttemperatur darstellt, unabhängig davon, ob erwärmt oder abgekühlt wird.

Mit diesen massgebenden Grössen (7) bzw. (8) und (9) und einem Interpolationsgesetz wie zum Beispiel (4) können nun die Wärmespannungen nach Formel (3) mit brauchbarer Genauigkeit berechnet werden, wie die Gegenüberstellung

von berechneten und gemessenen Werten am Beispiel von PP zeigt (Abb. 6). Insgesamt ergab sich über alle Werkstoffe eine Standardabweichung von 17,4%, worin 60% aller berechneten Werte liegen. Die Überprüfung anhand von PC (Abb. 7) und SB bestätigt mit Abweichungen zwischen 4 und 20% die Tauglichkeit des Rechenmodells.

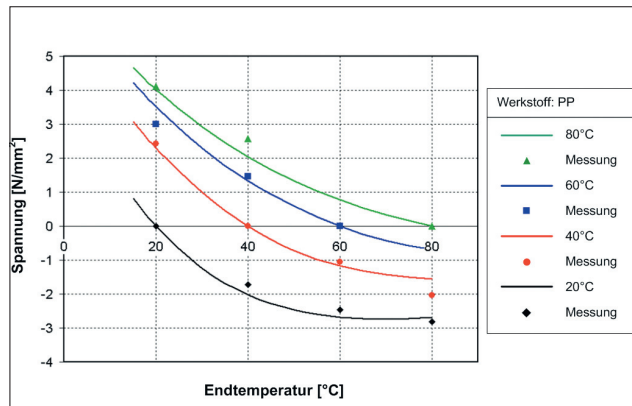
**Kritische Würdigung**

Mit dem Rechenmodell (3) und den dazu ermittelten Formeln gelingt es, die Wärmespannungen mit Erfassung der thermischen und mechanischen Vorgänge mit ihren Zeit- und Temperaturabhängigkeiten in guter Näherung zu berechnen. Dies im Sinn einer oberen Schranke, da der Wärmeübergang bei freier Konvektion wie auch bei Luft als Kontaktmedium des Kunststoffes wesentlich langsamer erfolgt, sodass die Wärmespannungen infolge stärkerer Auswirkung der Relaxation geringer ausfallen.

Die so berechnete Wärmespannung stellt einen Mittelwert für den ganzen Probenquerschnitt dar, also den Quotienten der sich unter Verformungsbehinderung aufbauenden Kraft und der Querschnittsfläche, und damit einen einachsigen Spannungszustand. Die aufgrund unterschiedlicher Temperaturen durch gegenseitige Behinderung innerhalb des Querschnitts entstehenden ein- oder mehrachsigen Spannungszustände lassen sich damit nicht erfassen. Dies gelingt allenfalls einer FEM-Berechnung mit geeignetem thermoviskoelastischem Werkstoffgesetz.

Eine weitere Einschränkung für die Gültigkeit des Rechenmodells ist der Temperaturbereich. Es muss offen bleiben, wie gut die Wärmespannungen ausserhalb des untersuchten Bereichs von 20 °C bis 80 °C berechenbar sind. Auch zeigte sich, dass bei Annäherung an die Formbeständigkeitstemperatur HDT/A die Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung merklich abnimmt.

Das hier präsentierte Rechenmodell arbeitet mit Werkstoffkennwerten aus Datenbanken oder Fachbü-



**Abb. 6: Vergleich der berechneten und gemessenen Wärmespannungen in Funktion der Endtemperatur am Beispiel von PP (BC 245 MO, Borealis) [9].**

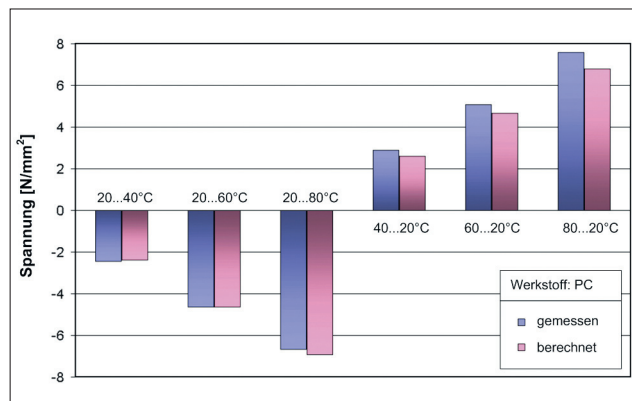
chern und mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_0$  als einer Systemkenngrösse. Damit setzt es die Verfügbarkeit dieser Grössen voraus. Dessen eingedenk dürfte der Praktiker an noch einfacheren Näherungen interessiert sein, allenfalls mit Abstrichen an der Genauigkeit.

Da die Resultate der hier präsentierten Lösung recht gut mit den Messergebnissen übereinstimmen, kann sie trotz der erwähnten Vorbehalte als realistisches und praxistaugliches Mittel zur Berechnung von Wärmespannungen in Kunststoffen gelten.

**Dank**

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojekts «Grundlagen für die Auslegung von Kunststoffkonstruktionen». Für dessen Förderung danken die Verfasser der Gebert Rüt Stiftung, Basel, und dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik Rapperswil. Der Gebert Produktions AG, Jona, sei für die Bereitstellung der Probekörper gedankt.

**Abb. 7: Tauglichkeit des Rechenmodells: Gemessene und berechnete Wärmespannungen bei PC (Makrolon 2805, Bayer) im Vergleich [9].**



**Literatur**

- [1] Oberbach, K.: Kunststoff-Kennwerte für Konstrukteure, S. 133. 2. Aufl., Carl Hanser Verlag München, 1980
- [2] Oberbach, K.: Wärmespannungen bei Kunststoffen. Kunststoffe 63(1973)11, S. 798-802
- [3] N.N.: Wärmespannungen bei Kunststoffen. ATI 44 - Anwendungstechnische Information der Bayer AG Leverkusen, 1991
- [4] Ehrenstein, W. G.: Mit Kunststoffen konstruieren. 2. Aufl., Carl Hanser Verlag München, 2001
- [5] Linhardt, F.: Relaxation von Wärmespannungen in Ziegler-Polyäthylen. Kunststoffe 51(1961)6, S. 310-312
- [6] Ehrbar, J.: Axiale Wärmespannungen starr montierter Thermoplast-Rohrleitungen. Schweiz. Verkehrs- und Industrierevue (1963)2, S. 37-42
- [7] Menges, G., Roberg, P.: Auflageabstände von waagrecht verlegten Rohrleitungen, Teil 5. Kunststoff-Berater (1969)9, S. 716-720
- [8] Schreyer, G. (Hrsg.): Konstruieren mit Kunststoffen, S. 244-246. Carl Hanser Verlag München, 1972
- [9] Kunz, J., Furrer, F., Studer, M., De Maria, E.: Forschungsprojekt Wärmespannungen in Kunststoffen. Diverse interne, unveröffentlichte Dokumente. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 1999-2006
- [10] Campus 5.0 Werkstoffdatenbank. CWFG GmbH, Frankfurt/Main
- [11] Domininghaus, H.: Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften. Eyerer, P., Elsner, P., Hirth, T. (Hrsg.), 6. Aufl., Springer Verlag Heidelberg, 2005
- [12] Sächling, H.: Kunststoff-Taschenbuch. Oberbach, K., Baur, E., Brinkmann, S., Schmachtenberg, E. (Hrsg.), 29. Aufl., Carl Hanser Verlag München, 2004
- [13] N.N.: Diverse Diplom- und Studienarbeiten. HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 1981-2004
- [14] Tanner, F.: Näherungsweise Bestimmung des zeit- und temperaturabhängigen Kriechmoduls von Kunststoffen aus Campus-Ein-Punkt-Daten. Diplomarbeit HSR Hochschule für Technik Rapperswil, 2001
- [15] Kunz, J.: Kriechbeständigkeit - ein Kennwert für das Kriechverhalten. Kunststoffe 94(2004)1, S. 30-31
- [16] Kunz, J.: Temperaturabhängigkeit des Kriechmoduls erfassen. SwissPlastics 54(2007)3, S. 25-28
- [17] N.N.: VDI-Wärmeatlas. 8. Aufl., Springer Verlag Heidelberg, 1997