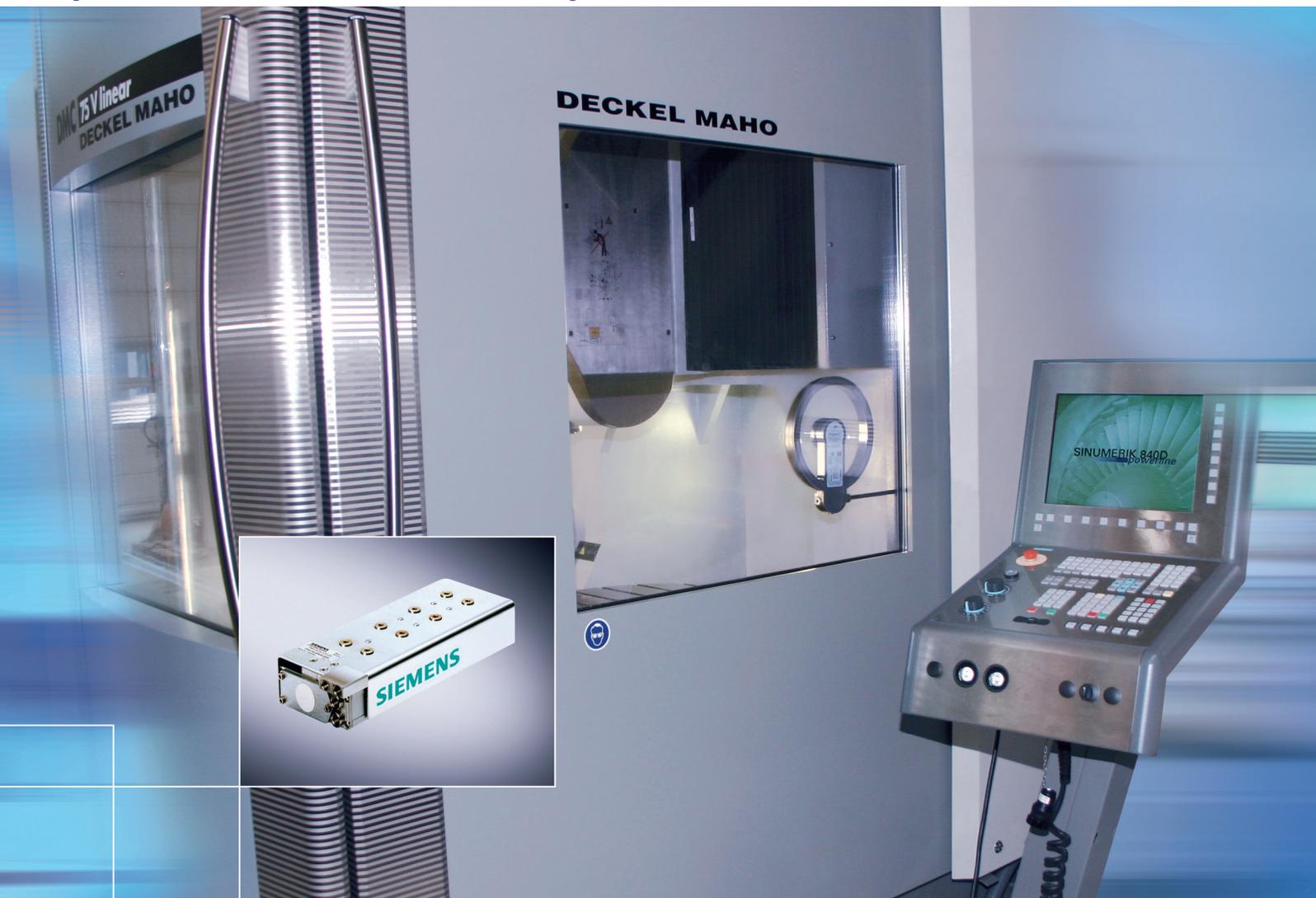


Konstruktion

Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe

Organzeitschrift der VDI-Gesellschaften Entwicklung Konstruktion Vertrieb (VDI-EKV) und Werkstofftechnik (VDI-W)



**Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit
in der beanspruchungsgerechten Auslegung**

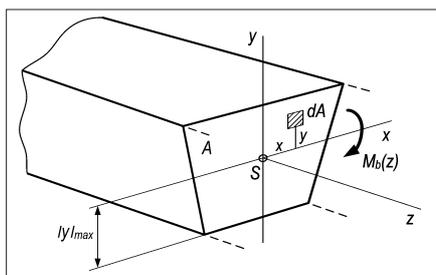
J. Kunz, D. Lukic

Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit in der beanspruchungsgerechten Auslegung

Load Appropriate Design: Bending Stiffness and Bending Strength

Inhalt Auf Basis der technischen Biegelehre werden die Grundlagen für die beanspruchungsgerechte Auslegung biegebeanspruchter Konstruktionen dargestellt. Dabei werden die unterschiedlichen Anforderungen an die Biegesteifigkeit und an die Biegefestigkeit herausgearbeitet. So weit möglich, werden empfehlende Hinweise für die Konstruktionspraxis gegeben. Mit diesen Ausführungen wird zugleich ein unzutreffender Vergleich verschiedener Querschnittsformen aufgrund ihrer Biegesteifigkeiten in der Fachliteratur richtiggestellt.

Abstract Based on the technical bending theory, the fundamentals of the load appropriate design of constructions under bending load are presented. Thereby the different requirements on both the bending stiffness and the bending strength were emphasized. As much as possible, recommending notes for the design practice were given. At the same time, these explications justify incorrect comparisons between the different cross-sections by reason of its bending stiffness published in the technical literature.

**Bild 1**

Biegequerschnitt A und Koordinatensystem x, y, z

1 Einleitung

Die beanspruchungsgerechte Auslegung zielt primär darauf ab, die Geometrie eines Bauteils so zu definieren, dass es seine Funktion bei gegebenem Werkstoff mit einem Minimum an Werkstoffaufwand erfüllen kann. Dies beinhaltet unter anderem die gezielte Abstimmung der Querschnittsgeometrie mit den Anforderungen an die Steifigkeit und die Belastbarkeit des Bauteils [1]. Der Spielraum an geometrischen Einflussmöglichkeiten ist bei keiner andern Beanspruchung so groß wie bei der Biegung.

Die Fachliteratur gibt dem Konstrukteur zu diesem vielschichtigen Thema wertvolle qualitative und quantitative Unterlagen in Form von Erläuterungen, Empfehlungen, Diagrammen, Tabellen und Beispielen an die Hand [2 bis 5]. Deren erfolgreiche Nutzung setzt beim Anwender fundierte Kenntnisse der maßgebenden festigkeits- und verformungsmechanischen Gesetzmäßigkeiten und Grundbegriffe voraus, die ihm unter anderem auch den kritischen Umgang mit den verfügbaren Informationen erlauben. Denn auch in der Fachliteratur sind immer wieder Ungereimtheiten zu entdecken, die der Klärung oder Richtigestellung bedürfen.

Eine solche erfordert eine sonst sehr nützliche Abhandlung [6], in der ein Vergleich der Biegesteifigkeiten verschiedener Querschnittsformen fälschlicherweise aufgrund der Widerstandsmomente vorgenommen wird. Diese Publikation ist zwar älteren Datums, doch ist dieser unzutreffende Vergleich in Fachbüchern übernommen worden, wo sie leider samt Fehler nach wie vor zitiert wird [z.B. 4, 5].

Der vorliegende Beitrag will diesbezüglich Klarheit schaffen.

2 Grundlagen

Steifigkeit und Belastbarkeit einer Biegekonstruktion werden beide wesentlich von der Querschnittsgeometrie beeinflusst, d.h. in erster Linie von der Form des Querschnitts und weniger von dessen Flächeninhalt.

Die Biegesteifigkeit ist ein Maß für den Widerstand eines biegebeanspruchten Bauteils gegen eine Verformung. In der Biegetheorie 1. Ordnung ist die Krümmung der Biegelinie proportional zum Biegemoment M_b und damit praktisch gleich der zweiten Ableitung der lokalen Durchbiegung $y(z)$, sowie umgekehrt proportional zur Biegesteifigkeit $E \cdot I_x$, wie dies die Differentialgleichung der Biegelinie

Autoren

Prof. Dipl.-Ing. Johannes Kunz
Dipl.-Ing. Dejan Lukic
beide
Institut für Werkstofftechnik und
Kunststoffverarbeitung (IWK)
HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Oberseestrasse 10
CH-8640 Rapperswil (Schweiz)
E-Mail: iwkw@hsr.ch
www.iwk.hsr.ch

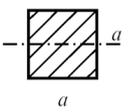
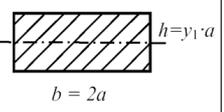
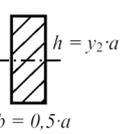
Profil	Biegesteifigkeit vorgegeben	Biegefestigkeit vorgegeben
0 	$I_0 = \frac{a^4}{12}$ $W_0 = \frac{a^3}{6}$ $A_0 = a^2$	
1 	$y_1 = 0,794$ $I_1 = I_0 = \frac{a^4}{12}$ $W_1 = 1,26 \cdot W_0$ $A_1 = 1,59 \cdot A_0$	$y_1 = 0,707$ $I_1 = 0,707 \cdot I_0$ $W_1 = W_0 = \frac{a^3}{6}$ $A_1 = 1,41 \cdot A_0$
2 	$y_2 = 1,26$ $I_2 = I_0 = \frac{a^4}{12}$ $W_2 = 0,794 \cdot W_0$ $A_2 = 0,63 \cdot A_0$	$y_2 = 1,41$ $I_2 = 1,41 \cdot I_0$ $W_2 = W_0 = \frac{a^3}{6}$ $A_2 = 0,707 \cdot A_0$

Tabelle 1

Gegenüberstellung von Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit am Beispiel verschiedener Rechteckquerschnitte

Profil	Eigenschaft	Vergleich [%]	
		50	100
IPE 450 	$I_x = 33'740 \text{ cm}^4$		100 %
	$W_x = 1'500 \text{ cm}^3$		100 %
	$A = 98 \text{ cm}^2$		100 %
IPBI 360 	$I_x = 33'090 \text{ cm}^4$		98 %
	$W_x = 1'890 \text{ cm}^3$		126 %
	$A = 143 \text{ cm}^2$		146 %
IPBI 320 	$I_x = 22'900 \text{ cm}^4$		68 %
	$W_x = 1'480 \text{ cm}^3$		99 %
	$A = 124 \text{ cm}^2$		127 %

Tabelle 2

Gegenüberstellung ausgewählter Normprofile vergleichbarer Biegesteifigkeit bzw. Biegefestigkeit

$$y''(z) = \frac{M_b(z)}{E \cdot I_x} \quad (1)$$

ausdrückt. Werkstoffseitig wird die Biegesteifigkeit

$$E \cdot I_x = \frac{M_b(z)}{y''(z)} \quad (2)$$

durch den Elastizitätsmodul E bestimmt, und das axiale Flächenträgheitsmoment I_x der Querschnittsfläche repräsentiert in ihr den geometrischen Anteil.

Die Belastbarkeit eines bestimmten Querschnitts der biegebeanspruchten Konstruktion ergibt sich aus der Biege-Grundgleichung

$$\sigma(y, z) = \frac{M_b(z)}{I_x} \cdot y \quad (3)$$

für den kritischen Querschnitt und aus der Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b(z) = \frac{M_b(z)}{I_x} \cdot /y/_{\max} \leq \sigma_{zul} \quad (4)$$

durch einfache Umformung zu

$$M_b(z) = \sigma_b \cdot \frac{I_x}{/y/_{\max}} = \sigma_b \cdot W_x \leq \sigma_{zul} \cdot W_x \quad (5)$$

Darin ist σ_{zul} die unter den herrschenden Bedingungen zulässige Spannung des Werkstoffs, und W_x stellt das axiale Widerstandsmoment der Querschnittsfläche dar. Dieses ist somit das geeignete geometrische Maß für die Belastbarkeit eines Querschnitts unter Biegung bzw. für die Beurteilung der Biegefestigkeit.

Das axiale Flächenträgheitsmoment der Fläche A bezüglich der Biegeachse x (Bild 1) ist definiert als statisches Flächenmoment 2. Ordnung gemäß

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (6)$$

Daraus leitet sich gemäß (5) das axiale Widerstandsmoment ab, indem I_x durch den maßgebenden Randfaserabstand dividiert wird, der zumeist dem Größtwert entspricht:

$$W_x = \frac{I_x}{/y/_{\max}} \quad (7)$$

Bei Werkstoffen, deren Zug- und Druckfestigkeit sich deutlich unterscheiden, ist anstelle von $/y/_{\max}$ der je für die Zug- und die Druckseite geltende Randfaserabstand einzusetzen.

3 Beanspruchungsgerechte Auslegung auf Biegesteifigkeit oder Biegefestigkeit

Die nachfolgenden Überlegungen basieren auf den üblichen Annahmen bzw. Voraussetzungen der technischen Biegelehre, nämlich:

- die Durchbiegungen sind klein im Vergleich zu den Abmessungen des Bauteils, d.h. es gilt die Theorie 1. Ordnung;
- es handelt sich um gerade Biegung, d.h. die Biegeachse x ist eine Querschnittshauptachse;
- die Biegequerschnitte bleiben bei der Verformung eben, d.h. alle fällige Schubefflüsse sind vernachlässigbar klein;
- allfällige Behinderungen der Querkontraktion in der Querschnittsfläche sind vernachlässigbar klein, d.h. der Spannungszustand ist einachsig;
- das Verformungsverhalten der Werkstoffe ist linear-elastisch, d.h. es gilt das Hookesche

Gesetz und die Spannungsverteilung im Querschnitt ist linear;

- die Biegefestigkeiten des Werkstoffs auf der Zug- und der Druckseite sind von gleicher Größe.

Die beanspruchungsgerechte Auslegung einer biegebeanspruchten Konstruktion bezieht die Aspekte der Biegesteifigkeit und der Biegefestigkeit gleichermaßen mit ein. Dabei ist je nach den Anforderungen an die Konstruktion zu definieren, welcher der beiden Aspekte im Vordergrund steht. So kann im einen Fall die Biegesteifigkeit vorgegeben sein, und es stellt sich die Frage nach einer möglichst hohen Belastbarkeit, im andern Fall ist bei vorgegebener Biegefestigkeit die Biegesteifigkeit zu maximieren, was durchaus zu unterschiedlichen Querschnittsparametern führen kann. Eine hohe Biegesteifigkeit wird mit möglichst viel Querschnittsanteil in großem Abstand von der Biegeachse erzielt. Für eine hohe Biegefestigkeit dagegen ist als Erkenntnis aus Beziehung (7) zusätzlich ein geringer Randfaserabstand anzustreben, was zuweilen zu einem Zielkonflikt führen kann.

Zur Erläuterung dieser Aussage wird, ausgehend vom Quadrat als Bezugsquerschnitt, ein Rechteck betrachtet. Soll bei verlangter Belastbarkeit die Steifigkeit möglichst hoch werden, so bietet sich bekanntlich ein stehendes Rechteck an, umgekehrt führt bei vorgegebener Steifigkeit ein liegendes Rechteck zu einer höheren Biegefestigkeit (Tabelle 1), allerdings um den Preis einer wesentlich größeren Querschnittsfläche.

Bei komplizierteren Querschnittsgeometrien gelten, wenn auch die Zusammenhänge möglicherweise nicht mehr ganz so überschaubar sind, grundsätzlich dieselben Gesetzmäßigkeiten. Soll beispielsweise ein Normprofil IPE 450 durch ein IPBl mit vergleichbarer Biegesteifigkeit ersetzt werden, so bedarf es eines IPBl 360. Dessen rund

Profil	Vergleich [%]		Rang	
	50	100	I	W
I IPE 100 IPE 100: 100/55/4,1/5,7	100	100	2	1
□ Rechteck 5:1 25/125/3,3	106	81	1	3
□ Rechteck 2 : 1 RHS: 100/50/3,2	87	82	3	2
○ Rohr dünn ROR: Ø 95/3,2	71	71	4	5
□ Rechteck 5 : 1 20/100/4,2	66	62	5	7
I I quadratisch 70/70/4/5	55	76	6	4
□ Rechteck 1:1 RHS: 70/70/3,6	47	65	7	6
U U hoch UPN 80 h: 45/80/6/8	33	55	8	9
T T schmal IPET 160: 82/80/5/7,4	32	26	9	14
I I breit 100/50/4/4	30	58	10	8
L Winkel LNR 70: 70/70/7	30	28	11	13
● Rohr dick Ø 60/5	28	39	12	10
I 4-Kant 1:5 13,5/67,5	26	36	13	12
■ 4-Kant 1:2 21/42	10	23	14	15
L U quer UPN 80 q: 80/45/6/8	10	38	15	11
T T breit HEAT 100: 100/48/5/7	7	9	16	19
■ 4-Kant 1:1 VKT 30	5	16	17	16
● Kreis RND Ø 35	5	14	18	17
■ 4-Kant 2:1 42/21	3	11	19	18
■ 4-Kant 5:1 67,5/213,5	1	7	20	20

 Biegesteifigkeit
 Biegefestigkeit

25 Prozent höheres Widerstandsmoment führt allerdings zu einer entsprechenden festigkeitsmäßigen Überdimensionierung bzw. geringeren Materialausnutzung (Tabelle 2). Ist in etwa gleiche Biegefestigkeit verlangt, so genügt ein IPBL 320, allerdings – trotz größerem Materialaufwand – unter Verlust von einem Drittel der Steifigkeit.

Diese Erkenntnis unterstreicht das Erfordernis einer eindeutigen Zielsetzung der beanspruchungsgerechten Gestaltung und der klaren Unterscheidung zwischen Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit bzw. zwischen den Einflüssen variierter Flächenträgheits- und Widerstandsmomente. Auf keinen Fall eignet sich das Widerstandsmoment eines Querschnittes für die Beurteilung der Biegesteifigkeit, wie dies da und dort in der Fachliteratur leider angegeben wird [4 – 6].

4 Hilfen für die Konstruktionspraxis

Angesichts der Vielfalt möglicher Querschnittsformen verwundert es nicht, dass es keine allgemeingültigen Konstruktionsrichtlinien für das Zusammenspiel von Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit gibt. Immerhin lassen sich aber zwei grundsätzliche Empfehlungen abgeben:

- Für eine hohe Biegesteifigkeit eignen sich Querschnitte mit hohem axialem Flächenträgheitsmoment, also mit möglichst viel Flächenanteil in großem Abstand von der Biegeachse.
 - Für eine hohe Biegefestigkeit eignen sich Querschnitte mit hohem axialem Widerstandsmoment, was mit einem hohen axialen Flächenträgheitsmoment bei gleichzeitig geringem Randfaserabstand erzielt werden kann.
- Eine gewisse Orientierungshilfe beim beanspruchungsgerechten Gestalten bieten Gegenüberstellungen verschiedener Querschnittsformen gleichen Flächeninhalts. Beim Einbezug von Normprofilen in diese Vergleiche ist zu beachten,

Literatur

[1] Kunz, J.: Beanspruchungsgerechte Gestaltung. In: Kunz, J., Michaeli, W., Herrlich, N., Land, W. (Hrsg.): *Kunststoffpraxis: Konstruktion*, WEKA Media GmbH Kissing, Aktualisierungsstand April 2006

[2] Grothe, K.-H., Feldhusen, J. (Hrsg.): *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Verlag Berlin, 21. Aufl., 2005

[3] Czichos, H., Hennicke, M. (Hrsg.): *Hütte – Das Ingenieurwissen*. Springer Verlag Berlin, München, 1995

[4] Erhard, G.: *Konstruieren mit Kunststoffen*. Carl Hanser Verlag München, 3. Aufl., 2005

[5] Ehrenstein, G. W.: *Mit Kunststoffen konstruieren*. Carl Hanser Verlag München, 1995

[6] Steinhilper, W., Kahle, U.: *Biegung, Schub und Torsion beeinflussen die Gestalt eines Bauteils*. Vogel Verlag Würzburg: *Maschinenmarkt* 87(1981)75, S. 1448–1450

Tabelle 3
Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit verschiedener Querschnittsformen gleichen Flächeninhalts im Vergleich

dass die Abmessungen der Normprofile derselben Reihe nicht streng proportional zueinander sind, so dass die vorzunehmende Flächenbereinigung nicht exakt den Proportionalitäten

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 \quad (8)$$

für die Flächenträgheitsmomente und

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{A}{A_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

für die Widerstandsmomente folgt, sondern nur näherungsweise. Damit können die Resultate solcher Vergleiche zwar keinen Anspruch auf absolute quantitative Gültigkeit erheben, die zahlenmäßigen Größenordnungen lassen aber qualitativ hinreichende Schlüsse zu. So bestätigt sich, dass die Biegesteifigkeit und die Biegefestigkeit nicht denselben Gesetzmäßigkeiten folgen (Tabelle 3).

5 Zusammenfassung

Die genaue Betrachtung zeigt, dass bei der beanspruchungsgerechten Auslegung biegebeanspruchter Konstruktionen klar zwischen den geometrischen Anforderungen an die Biegesteifigkeit und jenen an die Biegefestigkeit unterschieden werden muss. Während eine hohe Biegesteifigkeit mit einem hohen axialen Flächenträgheitsmoment der Querschnittsfläche erzielt wird, verlangt eine hohe Biegefestigkeit zusätzlich ein hohes axiales Widerstandsmoment, also einen möglichst geringen Randfaserabstand. Wenn auch keine allgemeingültigen Konstruktionsrichtlinien für das Zusammenspiel von Biegesteifigkeit und Biegefestigkeit gegeben werden können, so bieten dennoch Gegenüberstellungen verschiedener Querschnittsformen gleichen Flächeninhalts eine gewisse Orientierungshilfe für die Praxis.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Zusammenhang mit dem Forschungsprojekt „Grundlagen für die Auslegung von Kunststoffkonstruktionen“. Für dessen Förderung danken die Verfasser der Gebert RUF Stiftung, Basel, und dem Forschungsfonds der HSR Hochschule für Technik, Rapperswil