Übung 9

-

Zufallsvariablen und stetige Verteilungen

Musterlösung

Aktuelle Version: 30. August 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Worin liegt die Bedeutung der Normalverteilung?

   Die Normalverteilung ist aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes wichtig: Viele kleine unabhängige (und identisch verteilte) Zufallseffekte summieren sich approximativ zu einem normalverteilten Gesamteffekt.

   Für die Statistik besonders bedeutsam ist hierbei, dass dadurch Mittelwerte von Stichproben einer Population normalverteilt sind.

2. Was ist der Zusammenhang zwischen Normalverteilung und Standardnormalverteilung?

   Die Standardnormalverteilung ist eine Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung von $\sigma = 1$.

   Jegliche Normalverteilung kann mittels Verschieben und Stauchen zu einer Standardnormalverteilung transformiert werden, um Dichtefunktionswerte aus entsprechenden Tabellen zu lesen.

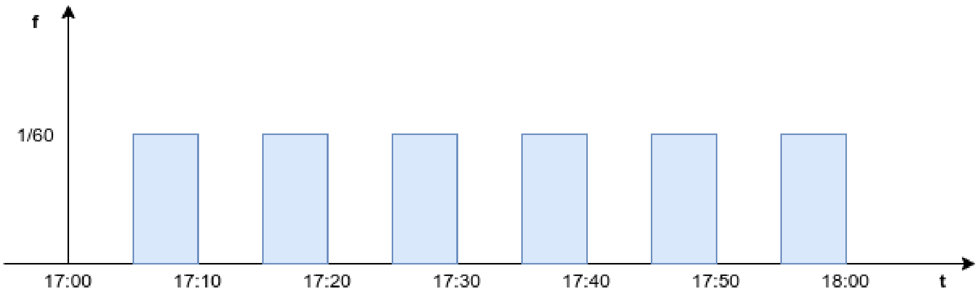
3. Welche wichtigen stetigen Verteilungsfunktionen kennen Sie? Welchen Erwartungswert und welche Varianz haben diese?

   - Die *Exponentialverteilung* ist eine Verteilung, welcher einer Exponentialfunktion folgt. Mögliche Anwendungsfälle: Zeit zwischen zwei Anrufen, Lebensdauer von Bauteilen (ohne Alterung), etc.
   - Die *Rechtecksverteilung* ist eine Verteilung, welche innerhalb eines Intervalls gleichverteilt ist. Mögliche Anwendungsfälle: Warten auf einen Bus, etc.
   - Die *Dreiecksverteilung* ist eine Verteilung, welche einem "Dreieckfolgt. Mögliche Anwendungsfälle: Eintreten von Ereignissen mit Minimum, Maximum, Modus.
   - Die *Normalverteilung* beschreibt die Verteilung der Summe von unabhängigen Ereignissen. Mögliche Anwendungsfälle: Streuung von Messwerten, Abweichungen von Soll-Massen, etc.

Übung 2. *Rechtecksverteilung*

Sie besuchen Freunde an der Uni Erfurt und wollen von dort mit der nächsten S-Bahn weiterfahren, und zwar zwischen 17 und 18 Uhr. Zwischen 17 und 18 Uhr fahren die Strassenbahnen der Linien 3 und 6 ab Haltestelle Universität Richtung Ürbicher Kreuz"bzw. Rieth"jeweils im 10-Minuten Takt. Der erste Zug der Linie 3 fährt um 17:05 Uhr, der erste Zug der Linie 6 um 17:00 Uhr. Wenn ein Sie zufällig zu einer gleichverteilten Zeit zwischen 17:00 Uhr und 18:00 Uhr die Haltestelle erreichen und einfach in die nächste Strassenbahn einsteigt, wie gross ist die dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie eine Bahn in Richtung „Rieth“ nehmen?

Zur Lösung der Aufgabe verbildlichen wir erst einmal die Situation mit der Verteilungsdichte. Die Ankunftswahrscheinlichkeit in dieser Zeitspanne ist gleichverteilt mit 1/60, da die Fläche unter der Kurve gleich eins ist.



Eine Ankunft in den blau skizzierten Intervallen führen Sie nach Rieth", die Fläche unter diesen Intervallen entspricht demnach der Wahrscheinlichkeit, an den richtigen Ort zu gelangen:

$$P(Rieth) = \frac{6 \cdot 5min}{60min} = 0.5$$

Übung 3. *Exponentialverteilung*
Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden in Süddeutschland die Hotline SD eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an.

Wir haben eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 5$.

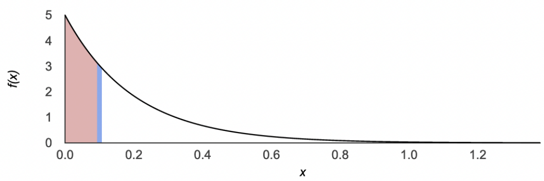
1. Alle wie viele Minuten erwarten Sie durchschnittlich ein Anruf ein?

   Der Erwartungswert ist $E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda} = 0.2$, d.h. wir erwarten im Mittel alle 12 Minuten einen Anruf.

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen höchstens 6 Minuten vergehen?

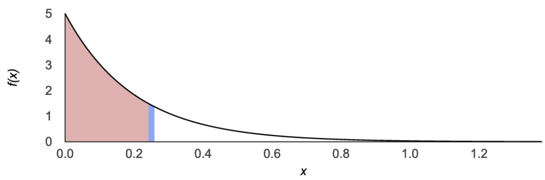
   Gefragt wird die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 6 Minuten gewartet werden muss, ehe ein Ereignis eintritt:

$$F(x \leq 0.1) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-5 \cdot 0.1} = 0.39$$



3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen höchstens 15 Minuten vergehen?

$$F(x \leq 0.25) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-5 \cdot 0.25} = 0.71$$

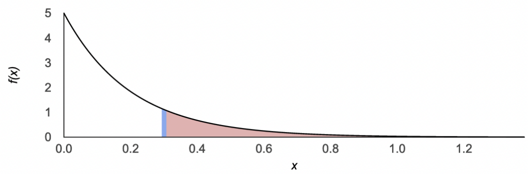


4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufe 6 bis 15 Minuten vergehen?

$$F(0.1 \leq x \leq 0.25) = F(0.25) - F(0.1) = 0.71 - 0.39 = 0.32$$

5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen mehr als 18 Minuten vergehen?

$$F(x > 0.3) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} = e^{-5 \cdot 0.3} = 0.22$$



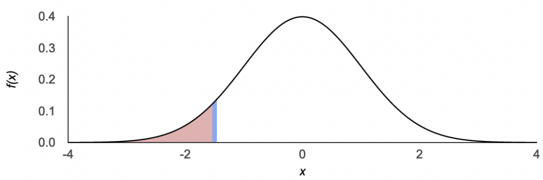
Übung 4. *Normalverteilung*
Eine fränkische Winzergenossenschaft füllt den Wein in Bocksbeutel ab. Messungen haben ergeben, dass die Füllmenge der Bocksbeutel normalverteilt ist mit einer durchschnittlichen Füllmenge von 753 ml bei einer Standardabweichung von 2 ml.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

1. Die Sollfüllmenge von 750 ml eines Bocksbeutels unterschritten wird?

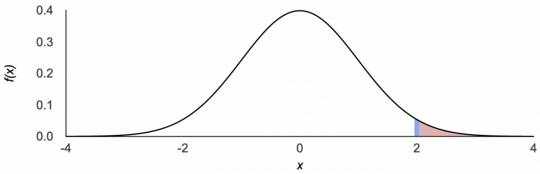
   Wir transformieren den Wert, um diesen in der Tabelle der Standardnormalverteilung abzulesen und erhalten:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{750 - 753}{2} = -1.5$$
$$P(z \leq -1.5) = 6.68\%$$



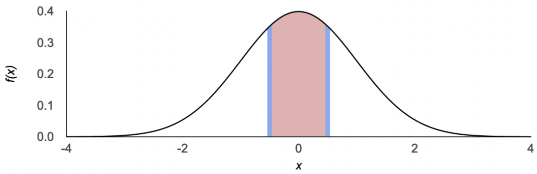
2. In einem Bocksbeutel mindestens 757 ml enthalten sind?

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{757-753}{2} = 2$$
$$P(z > 2) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 2.28\%$$



3. In einem Bocksbeutel zwischen 752 und 754 ml enthalten sind?

$$z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{754-753}{2} = 0.5$$
$$z_2 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{752-753}{2} = -0.5$$
$$P(-0.5 \leq z \leq 0.5) = P(z \leq 0.5) - P(-0.5 \leq x) = 0.6915 - 0.3085 = 38.3\%$$



Übung 5. *Inverse Transformationsmethode*
Mit der inversen Transformationsmethode können Zufallszahlen in eine gewünscht Verteilungsform gebracht werden. Gegeben seien die folgenden, zwischen $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen:

$$u_i = (0.71, 0.11, 0.98, 0.64)$$

Transformieren Sie die Zufallszahlen so, dass sie einer

1. Gleichverteilung mit $a = 2$ und $b = 7$ folgen

$$F(x) = u = \frac{x-a}{b-a}$$
$$F^{-1}(u) = x = u(b-a) + a$$
$$x_i = (5.55, 2.55, 6.90, 5.20)$$

2. Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.5$ folgen

$$F(x) = u = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$F^{-1}(u) = x = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - r)$$
$$x_i = (2.48, 0.23, 7.82, 2.04)$$

Zusatzaufgaben

Übung 6. *Rechtecksverteilung*
Gegeben sei die Rechtecksverteilung:

$$f = (x) = \begin{cases} h & a < x < b \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass:

1. $h = \frac{1}{b-a}$
   Die Fläche unter der Dichtekurve ist per Definition 1, wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b h\,dx = h(b-a) \\ h &= \frac{1}{b-a} \end{aligned} \tag{1}$$

2. $E(x) = \frac{b+a}{2}$

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\,dx = \int_a^b hx\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx \\ E(x) &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{(b+a)}{2} \end{aligned}$$

3. $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E(x))^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx - \frac{(b+a)^2}{4} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} \\ \sigma^2 &= \frac{4b^3 - 4a^3 - 3(a+b)^2(b-a)}{12(b-a)} = \frac{4b^3 - 4a^3 - 3(ab^2 - a^3 + b^3 - a^2b)}{12(b-a)} \\ \sigma^2 &= \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \tag{2}$$

   Nehmen Sie nun eine symmetrische Rechtecksverteilung an: $d = b = -a$. Wie verändert sich $f(x)$, $E(x)$ und σ in Abhängigkeit von d?

Die Verteilungsfunktion hängt hyperbolisch von d ab (unten rot):

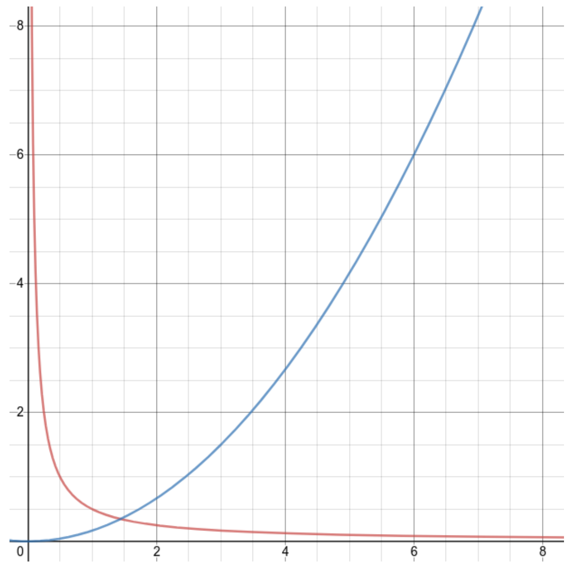
$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2d}$$

Der Erwartungswert ist unabhängig von d Null:

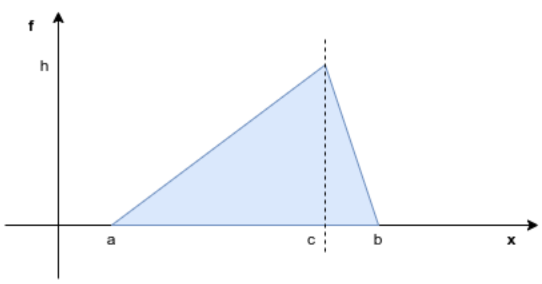
$$E(x) = \frac{b+a}{2} = \frac{d-d}{2} = 0$$

Die Varianz nimmt quadratisch mit d zu (unten blau):

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(d^2}{6}$$



Übung 7. *Dreiecksverteilung*
Gegeben sei die Dreiecksverteilung:



1. Bestimmen Sie h.

   Die Fläche unter der Kurve ist gleich 1, damit folgt:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{h(c-a)}{2} + \frac{h(b-c)}{2} = \frac{h}{2}(c-a+b-c) \\
h &= \frac{2}{b-a}
\end{aligned}
$$

2. Bestimmen die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ im Bereich $[a, c]$.

   Wir verwenden die Substitution $z = x - a$, d.h. wir verschieben die Kurve an den Nullpunkt.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{h}{c-a} z = \frac{2}{(b-a)(c-a)} z \\
f(x) &= \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}
\end{aligned}
$$

3. Bestimmen die Verteilungsfunktion $F(x)$ im Bereich $[a, c]$.

   Wir verwenden wieder die Substitution $z = x - a$.

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int f(z)\,dz = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int z\,dz = \frac{z^2}{(b-a)(c-a)} \\
F(x) &= \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}
\end{aligned}
$$

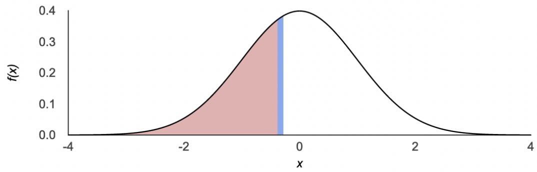
4. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $P(x \leq c)$?

$$
P(x \leq c) = F(c) = \frac{(c-a)^2}{(b-a)(c-a)} = \frac{c-a}{b-a}
$$

Übung 8. *Normalverteilung*
Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Ergebnisse bei Prüfungen eines Dozenten normalverteilt sind mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1.5$ und einem Durchschnitt von $\mu = 4.5$ Notenpunkten.

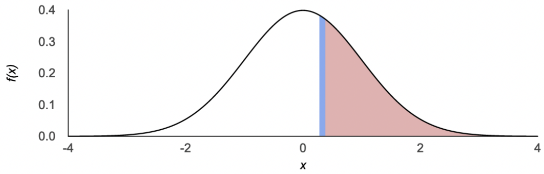
1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note kleiner als 4 hat?

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{4-4.5}{1.5} = -0.333 \\
P(z \leq -0.333) &= 37.0\%
\end{aligned}
$$



2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note grösser als 5 hat?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6 - 4.5}{1.5} = .333$$
$$P(z > 1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.630 = 37.0\%$$



3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note zwischen 3.5 und 4 hat?

$$z = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{3.5 - 4.5}{1.5} = -0.667$$
$$P(-0.667 \leq z \leq -0.333) = P(z \leq -0.333) - P(z \leq -0.667)$$
$$= 0.371 - 0.252 = 11.9\%$$

4. Wie viele Studenten von insgesamt 50 fallen durchschnittlich durch, wenn auf halbe Noten gerundet wird?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.75 - 4.5}{1.5} = -0.5$$
$$P(z \leq -0.5) = 30.9\%$$
$$50 \cdot P(z \leq -0.5) \approx 15$$