Übung 7

-

Kombinatorik
Musterlösung

Aktuelle Version: 7. Juli 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Worin unterscheiden sich Mengen und Tupel?

   Mengen enthalten jedes Element nur einmal, die Reihenfolge der Elemente ist unwichtig. Tupel können dieselben Elemente mehrfach enthalten, die Reihenfolge der Elemente ist von Bedeutung.

2. Worin besteht die Aufgabe der Kombinatorik?

   Die Kombinatorik liefert mathematische Modelle zur Bestimmung der Anzahl möglichen Anordnungen von Elementen mit/ohne Berücksichtigung von Reihenfolge und Wiederholung.

3. Worin besteht der Bezug der Kombinatorik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung?

   Bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen mittels Laplace-Experiment kann häufig Kombinatorik zum Zählen der günstigen und mögliche Fälle verwendet werden.

Übung 2. *Anordnungen*

Ein Regalsystem umfasst sieben Grundelemente, die in ihren räumlichen Ausmassen identisch, in ihren Funktionen aber unterschiedlich sind. Die auszuwählenden Grundelemente sind nebeneinander aufzustellen. Wie viele Anordnungen sind möglich, wenn:

1. Genau sieben Elemente aufzustellen sind?

   Wir wählen sieben Elemente aus der Grundmenge aus:

$$n = 7^7 = 823543$$

2. Genau fünf Elemente aufzustellen sind?

   Wir wählen fünf Elemente aus der Grundmenge aus:

$$n = 7^5 = 16807$$

3. Jedes Grundelement nur noch einmal vorhanden ist und genau vier Elemente aufzustellen sind?

   Wir wählen vier Elemente aus (ohne zurücklegen) und können diese anschliessend unterschiedlich anordnen (Permutation):

$$n = \binom{7}{4} \cdot 4! = \frac{7!}{4!(7-4!)} 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

4. Vier Elemente einmal und ein Element zweimal vorhanden sind und alle diese Elemente aufzustellen sind?

   Wir permutieren insgesamt sechs Elemente, haben dabei aber die doppelt vorhandenen Elemente zu viel gezählt:

$$n = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Übung 3. *Lotto*

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit im Lotto (6 aus 42) ...

1. Sechs Richtige anzukreuzen?

   Laplace-Experiment mit Ziehen ohne zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$P\{6 Richtige\} = \frac{1}{\binom{42}{6}} = \frac{1}{5245786} = 1.91 \cdot 10^{-7}$$

2. Sechs Richtige plus die Zusatzzahl (1 aus 6) anzukreuzen?

$$P\{6 + 1 Richtige\} = \frac{1}{6} P\{6 Richtige\} = \frac{1}{6 * 5245786} = 3.17 \cdot 10^{-8}$$

3. Genau drei Richtige anzukreuzen?

   Auch hier können wir ein Laplace-Experiment machen. Die Anzahl möglicher Ereignisse bleibt gleich. Die Anzahl günstige Ereignisse teilen wir auf zwei Vorgänge, welche wir beliebig kombinieren können:

   - 3 Richtige aus 6 Richtigen ziehen
   - 3 Falsche aus (42-6) Falschen ziehen

   Wir erhalten:

$$P\{3 Richtige\} = \frac{\binom{6}{3}\binom{42-6}{3}}{\binom{42}{6}} = \frac{20 \cdot 7140}{5245786} = 0.027$$

Übung 4. *Stichproben*
Eine Lieferung besteht aus 50 Glühbirnen. Aus der Lieferung werden fünf Glühbirnen zufällig und ohne Zurücklegen entnommen.

1. Wie viele Stichproben sind möglich?

$$\binom{50}{5} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot} = 2118760$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe genau zwei defekte Glühbirnen enthalten sind, wenn von den 50 Glühbirnen genau 10 defekt sind?

   Wir machen ein Laplace-Experiment machen. Die Anzahl möglicher Ereignisse bleibt gleich. Die Anzahl günstige Ereignisse teilen wir auf zwei Vorgänge, welche wir beliebig kombinieren können:

   - 2 Defekte aus 10 Defekten ziehen
   - (5-2) Funktionsfähige aus (50-10) Funktionsfähigen ziehen

   Wir erhalten:

$$P\{3Defekte\} = \frac{\binom{10}{2}\binom{50-10}{5-2}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3}}{2118760} = 0.21$$

Übung 5. *Kombinationsmöglichkeiten*
Aus einer Menge von 8 Amerikanern, 5 Engländern und 3 Franzosen soll ein Viererkomitee zufällig ausgewählt werden.

1. Wie viele Varianten gibt es insgesamt?

   Wir wählen zufällig 4 aus insgesamt 16 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne zurücklegen aus:

$$\binom{16}{4} = 1820$$

2. Wie viele Varianten enthalten nur Amerikaner?

   Wir wählen zufällig 4 aus insgesamt 8 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne zurücklegen aus:

$$\binom{8}{4} = 70$$

3. Wie viele Varianten enthalten keinen Amerikaner?

   Wir wählen zufällig 4 aus insgesamt (5+3) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne zurücklegen aus:

$$\binom{5+3}{4} = 70$$

Zusatzaufgaben

Übung 6. *Anordnungen*
Sie haben die fünf Ziffern 4, 5, 5, 6, 7 und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden und diese der Grösse nach ordnen (erste Zahl ist 45567, letzte Zahl 76554).

1. Wie viele Zahlen stehen in der Liste?

   Wir permutieren insgesamt fünf Ziffern, haben dabei aber die 5 doppelt gezählt:

   $$n = \frac{5!}{2!} = 60$$

2. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 5?

   Wir setzen die 5 an erster Stelle und können anschliessend noch 4 Stellen permutieren:

   $$n = 4! = 24$$

3. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 6?

   Wir setzen die 6 an erste Stelle und können anschliessend noch 4 Stellen permutieren, wobei wir die 5 wieder doppelt vorhanden ist:

   $$n = \frac{4!}{2!} = 12$$

4. An welcher Stelle der Liste steht 46575?

   Vor der 46575 stehen alle Zahlen, welche mit 45 beginnen: $n = 3! = 6$. Danach kommt 7. 46557, 8. 46575, 9. 46755, ...

   46575 steht also an 8. Stelle.

5. Welche Zahl steht an der 50. Stelle?

   Wir wissen bereits, dass 12 Zahlen mit 4, 24 Zahlen mit 5, und 12 Zahlen mit 6 beginnen. Damit ist die $12 + 24 + 12 + 1 = 49$. Zahl der Liste die erste die mit 7 beginnt: 74556. Damit ist die 50. Zahl die 74565.

Übung 7. *Kombinationsmöglichkeiten*
Die Rubus GmbH stellt hochwertige Bonbons mit den Geschmacksrichtungen Erdbeere, Himbeere, Brombeere, Zitrone und Apfelsine her. In eine Tüte werden 12 Bonbons abgefüllt. Wie viele mögliche Bonbonmischungen gibt es, wenn die Bonbons rein zufällig in die Tüten abgefüllt werden?

Wir wählen $k = 12$ Bonbons aus $n = 5$ Geschmackrichtungen aus, mit zurücklegen aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12} = 1820$$

Übung 8. *Kombinationsmöglichkeiten*
Zum Ausklang von Judits Geburtstagsfeier wird Eis angeboten. Es gibt fünf Sorten: Erdbeere, Himbeere, Schokolade, Vanille und Zitrone

1. Wie viele Kombinationen gibt es, wenn jedes Kind jeweils drei unterschiedliche Sorten auswählt?

   Wir wählen 3 aus 5 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne zurücklegen aus:

   $$\binom{5}{3} = 10$$

2. Wie vielen Kombinationen gibt es, wenn die drei Kugeln auch von derselben Sorte sein dürfen?

   Wir wählen 3 aus 5 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit zurücklegen aus:

   $$\binom{5+3-1}{3} = 35$$

3. Wie vielen Kombinationen gibt es, wenn **maximal** drei Kugeln auch von derselben Sorte sein dürfen?

   Es gibt die zusätzliche Option „Keine Kugel“ und damit insgesamt 6 Optionen. Wir wählen 3 aus 6 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne zurücklegen aus:

   $$\binom{6+3-1}{3} = 56$$