Ostschweizer Fachhochschule

Bauingenieurwesen

Selbsttest Mathematik mit Lösungen

Anweisungen zum Lösen des Selbsttests:

1. Es besteht kein Zeitlimit.
2. Sie können zum Lösen der Aufgaben eine Formelsammlung Ihrer Wahl verwenden.
3. Ausser bei Aufgabe 7 benötigen Sie keinen Taschenrechner.
4. Die Lösungen zu den Aufgaben finden Sie ab S. 11.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Das Verhältnis

a) $s_1 : s_2$ der Kantenlängen

b) $A_1 : A_2$ der Seitenflächeninhalte

c) $V_1 : V_2$ der Volumeninhalte

zweier Würfel betrage 4 : 1.

Wie gross ist dann in jedem der drei Fälle a), b) und c) jeweils das Verhältnis der Kantenlängen, der Seitenflächeninhalte bzw. der Volumeninhalte der zwei Würfel zueinander? Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle.

	$s_1 : s_2$	$A_1 : A_2$	$V_1 : V_2$
a)	4 : 1		
b)		4 : 1	
c)			4 : 1

Aufgabe 2

Berechnen Sie

a) $\dfrac{8^{4/3}\sqrt{2}}{2^{-3/2}}$

b) $\log_{10}\left(\dfrac{100}{\sqrt[3]{10}}\right)$

c) $\cos(60^\circ) - \sin(30^\circ) + \tan(45^\circ)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Mengen in der Grundmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Verwenden Sie dabei wo möglich die Intervallschreibweise, also z.B. $[-1,2)$ oder $[-1,2[$ statt $\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x < 2\}$.

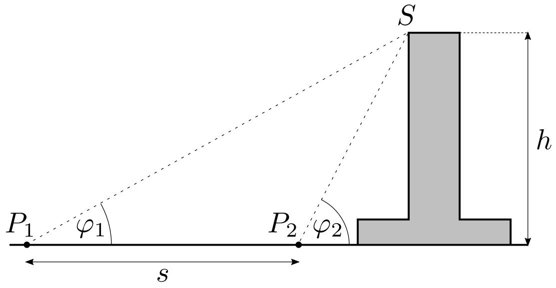
a) $M_1 \cap M_2$, wo $M_1 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 36\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R}; x^3 \geq 27\}$

b) $A \setminus B$ und $B \setminus A$, wo $A = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 4\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{x} \leq 2\}$

c) $X \cup \overline{Y}$, wo $X = (-\infty, -2)$ und $Y = \{x \in \mathbb{R}; x^2 > 4\}$

Aufgabe 4

Angenommen, die Höhe h eines Turmes an einer unzugänglichen Stelle soll bestimmt werden, ohne dabei den Turm besteigen zu müssen. Dazu wird zuerst am Boden eine auf den Turm zulaufende Strecke der Länge s abgetragen. Anschliessend wird von den Endpunkten P_1 bzw. P_2 dieser Strecke aus jeweils die Spitze S des Turms angepeilt und der mit der Horizontalen eingeschlossene Winkel φ_1 bzw. φ_2 gemessen (siehe folgende Skizze).



Leiten Sie eine Formel her, mit welcher sich die Höhe h des Turms ganz allgemein aus der Streckenlänge s und den beiden Winkeln φ_1 und φ_2 bestimmen lässt.

Aufgabe 5

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\dfrac{1}{(2a-3)(a-1)} - \dfrac{6}{4a^2-9} + \dfrac{5}{4a^2+2a-6}$

b) $\dfrac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{1 + \frac{x+1}{x-1}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a^{-2}\sqrt[3]{8b^7}}{2b^2}}$

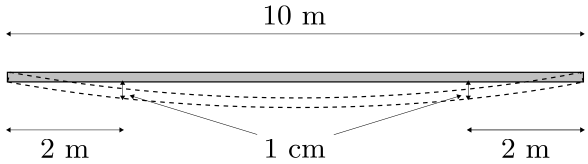
d) $\ln\left(x^2 - y^2\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x-y}\right) - \ln\left((x+y)^2\right)$

e) $\cos(\alpha) + \sin(270^\circ - \alpha)$

f) $\sin^2(-x) + \cos^2(x) + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$ (zur Notation: $\cos^2(x) = (\cos(x))^2$)

Aufgabe 6

In der unten stehenden Skizze ist ein an seinen beiden Enden aufliegender Balken von 10 m Länge dargestellt, der belastet wird und dadurch in die Form einer Parabel durchgebogen wird. Im Abstand 2 m von seinen Enden beträgt die Durchbiegung jeweils 1 cm (in der Skizze ist die Durchbiegung deutlich übertrieben dargestellt). Dass die beiden Enden des Balkens beim Durchbiegen zueinander hingezogen werden, darf hier vernachlässigt werden.



Welches ist die maximale Durchbiegung des Balkens, d.h. die Durchbiegung im tiefsten Punkt?

Aufgabe 7

Das Schlussresultat dieser Aufgabe können Sie mit einem Taschenrechner bestimmen.
In einem Behälter befinde sich eine Flüssigkeit mit der Temperatur 50° C. Der Behälter werde ins Freie gestellt, wo eine Temperatur von 0° C herrsche. Die Temperaturdifferenz zwischen Behälter und Umgebung halbiere sich nun jede Stunde, d.h. jede Stunde halbiere sich die Temperatur des Behälters in Grad Celsius.
Wie lange dauert es, bis die Flüssigkeit noch eine Temperatur von 5° C hat? Geben Sie das Resultat in Stunden und Minuten an.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils zuerst den Definitionsbereich D und dann die Lösungsmenge L der folgenden Gleichungen und Ungleichungen mit den Unbekannten x, y, z, u, v und w .

a) $\dfrac{2x+1}{x-3} + \dfrac{3x-5}{x+3} = \dfrac{2x^2+2x+18}{x^2-9}$

b) $3(y-2) < 2(5-2y)$

c) $3\,e^{2-3z} - 5 = 1$

d) $\sqrt{u+1} - \sqrt{u} = 0.5$

e) $\sin(v) = \cos(100\pi/9)$

f) $\left|\dfrac{2w+1}{w-2}\right| = 2$

Aufgabe 9

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $a \cdot x - 1 = x + 4x^2$ in den reellen Zahlen lösbar?

Aufgabe 10

Ein Wasserbecken von 120 m^3 Inhalt hat zwei Zuflüsse. Das Becken lässt sich vollständig füllen, wenn der erste Zufluss 5 Stunden und der zweite Zufluss 4 Stunden in Betrieb ist. Es lässt sich aber auch vollständig füllen, wenn der erste Zufluss nur 4 Stunden und der zweite Zufluss dafür 8 Stunden in Betrieb ist.
Wieviele Kubikmeter Wasser fliessen pro Stunde durch den ersten bzw. durch den zweiten Zufluss?

Lösungen

Lösung von Aufgabe 1

Der Seitenflächeninhalt ergibt sich beim Würfel als zweite Potenz (Quadrat) aus der Kantenlänge, und der Volumeninhalt ergibt sich als dritte Potenz aus der Seitenlänge. Zudem ergibt sich die Kantenlänge als zweite Wurzel (Quadratwurzel) aus dem Seitenflächeninhalt und als dritte Wurzel aus dem Volumeninhalt eines Würfels.
Damit gilt in a)

$$\begin{aligned} A_1 : A_2 &= s_1^2 : s_2^2 = 16 : 1 \\ V_1 : V_2 &= s_1^3 : s_2^3 = 64 : 1, \end{aligned}$$

in b)

$$\begin{aligned} s_1 : s_2 &= \sqrt{A_1} : \sqrt{A_2} = 2 : 1 \\ V_1 : V_2 &= \left(\sqrt{A_1}\right)^3 : \left(\sqrt{A_2}\right)^3 = 8 : 1, \end{aligned}$$

und in c)

$$\begin{aligned} s_1 : s_2 &= \sqrt[3]{V_1} : \sqrt[3]{V_2} = \sqrt[3]{4} : 1 \ (\approx 1.59 : 1) \\ A_1 : A_2 &= \left(\sqrt[3]{V_1}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{V_2}\right)^2 = \sqrt[3]{16} : 1 = \left(2\sqrt[3]{2}\right) : 1 \ (\approx 2.52 : 1). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende, ausgefüllte Tabelle

	$s_1 : s_2$	$A_1 : A_2$	$V_1 : V_2$
a)	$4 : 1$	$16 : 1$	$64 : 1$
b)	$2 : 1$	$4 : 1$	$8 : 1$
c)	$\sqrt[3]{4} : 1$	$2\sqrt[3]{2} : 1$	$4 : 1$

Lösung von Aufgabe 2

a) Es ist

$$\frac{8^{4/3}\sqrt{2}}{2^{-3/2}} = \frac{\left(2^3\right)^{4/3} \cdot 2^{1/2}}{2^{-3/2}} = 2^{3\cdot(4/3)} \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{3/2} = 2^{4+1/2+3/2} = 2^6 = 64\,.$$

b) Es ist

$$\log_{10}\left(\frac{100}{\sqrt[3]{10}}\right) = \log_{10}\left(\frac{10^2}{10^{1/3}}\right) = \log_{10}\left(10^{2-1/3}\right) = \log_{10}\left(10^{5/3}\right) = \frac{5}{3}\,.$$

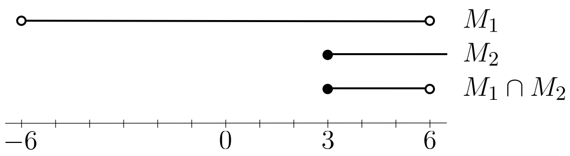
c) Da für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$, wird

$$\cos(60°) - \sin(30°) + \tan(45°) = \cos(60°) - \cos(60°) + \tan(45°) = \tan(45°) = 1\,.$$

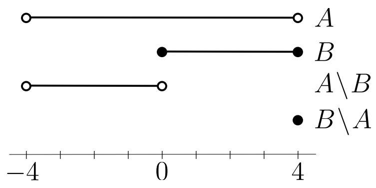
Lösung von Aufgabe 3

Im Folgenden ist die Bestimmung der gesuchten Menge jeweils auch grafisch dargestellt.

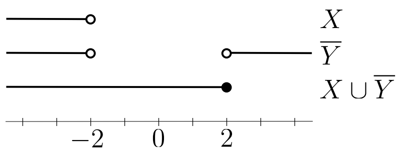
a) $M_1 \cap M_2 = (-6,6) \cap [3,\infty) = [3,6)$



b) $A \setminus B = (-4,4) \setminus [0,4] = (-4,0)$ und $B \setminus A = [0,4] \setminus (-4,4) = \{4\}$

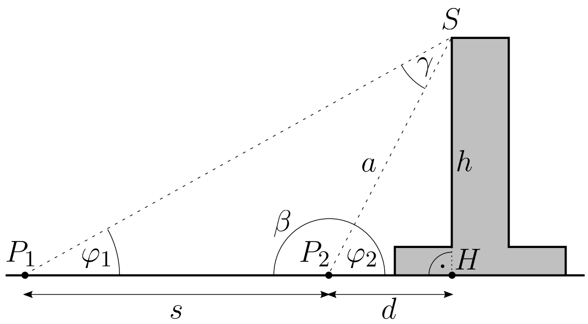


c) $X \cup \overline{Y} = (-\infty,-2) \cup \overline{(-\infty,-2) \cup (2,\infty)} = (-\infty,-2) \cup [-2,2] = (-\infty,2]$



Lösung von Aufgabe 4

Die gesuchte Abhängigkeit der Höhe h von der Streckenlänge s und den Winkeln φ_1 und φ_2 wird im Folgenden zuerst mit Hilfe des Sinussatzes und anschliessend bloss mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke hergeleitet. Dabei beziehen wir uns auf die folgende Skizze, in welcher insbesondere der Höhenfusspunkt H des Turms eingezeichnet ist.



1. Lösungsweg, mit Hilfe des Sinussatzes:
Im Dreieck P_1P_2S ist der Winkel

$$\gamma = 180^\circ - \varphi_1 - \beta = 180^\circ - \varphi_1 - (180^\circ - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \,.$$

Mit dem Sinussatz gilt dann in ebendiesem Dreieck

$$\frac{a}{\sin(\varphi_1)} = \frac{s}{\sin(\gamma)} = \frac{s}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

und damit

$$a = s \cdot \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \,.$$

Im rechtwinkligen Dreieck P_2HS ergibt sich dann die gesuchte Höhe als

$$h = a \cdot \sin(\varphi_2) = s \cdot \frac{\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \; .$$

2. Lösungsweg, mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke:
Wir gehen von den zwei rechtwinkligen Dreiecken P_1HS und P_2HS aus. Es gilt

$$\begin{aligned} &\text{im Dreieck } P_1HS: \; \tan(\varphi_1) = \frac{h}{s+d} \\ &\text{im Dreieck } P_2HS: \; \tan(\varphi_2) = \frac{h}{d} \end{aligned}$$

Wir berechnen beispielsweise d aus der zweiten Gleichung und setzen es in die erste Gleichung ein, welche wir dann nach h auflösen:

$$\begin{aligned} &\tan(\varphi_2) = \frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h}{\tan(\varphi_2)} \\ &\tan(\varphi_1) = \frac{h}{s+d} = \frac{h}{s + \frac{h}{\tan(\varphi_2)}} = \frac{h}{\frac{s \cdot \tan(\varphi_2) + h}{\tan(\varphi_2)}} = \frac{h \cdot \tan(\varphi_2)}{s \cdot \tan(\varphi_2) + h} \end{aligned}$$

und damit

$$\tan(\varphi_1) \cdot (s \cdot \tan(\varphi_2) + h) = h \cdot \tan(\varphi_2) \; ,$$

so dass schliesslich

$$h = s \cdot \frac{\tan(\varphi_1) \cdot \tan(\varphi_2)}{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)} \; .$$

Die beiden Lösungen für h sehen unterschiedlich aus, sind aber tatsächlich identisch, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \frac{\tan(\varphi_1) \cdot \tan(\varphi_2)}{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)} &= \frac{\frac{\sin(\varphi_1)}{\cos(\varphi_1)} \cdot \frac{\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_2)}}{\frac{\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_2)} - \frac{\sin(\varphi_1)}{\cos(\varphi_1)}} = \frac{\frac{\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2)}}{\frac{\sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) - \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2)}{\cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1)}} = \frac{\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) - \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2)} \\ &\overset{*)}{=} \frac{\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \; , \end{aligned}$$

wobei wir bei $*)$ den Nenner mit dem Additionstheorem des Sinus, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$, vereinfachen können.

Lösung von Aufgabe 5

a) Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{4a^2-9} + \frac{5}{4a^2+2a-6} = \frac{1}{(2a-3)(a-1)} - \frac{6}{(2a-3)(2a+3)} + \frac{5}{2(a-1)(2a+3)} \\ &\quad = \frac{1 \cdot 2(2a+3) - 6 \cdot 2(a-1) + 5 \cdot (2a-3)}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} = \frac{(4a+6) - (12a-12) + (10a-15)}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} \\ &\quad = \frac{2a+3}{2(2a-3)(2a+3)(a-1)} = \frac{1}{2(2a-3)(a-1)} \; . \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}}{\frac{(x-1)+x+1}{x-1}} = \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{x} \; .$$

c) Es ist

$$\sqrt{\frac{a^{-2}\sqrt[3]{8b^7}}{2b^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{b^6}\sqrt[3]{b}}{2a^2b^2}} = \sqrt{\frac{2b^2\sqrt[3]{b}}{2a^2b^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{b}}{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{b}{a^{12}}} \quad \left(\text{oder } \frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt[6]{b}}{|a|}\right) .$$

(Achtung: Für $a < 0$ ist $\sqrt{a^2} \neq a$!)

d) Es ist

$$\ln\left(x^2 - y^2\right) + \ln\left(\frac{1}{x-y}\right) - \ln\left((x+y)^2\right) = \ln\left(\frac{\left(x^2-y^2\right)\cdot\frac{1}{x-y}}{(x+y)^2}\right) = \ln\left(\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2(x-y)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2(x-y)}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+y}\right) = -\ln(x+y) .$$

e) Es ist

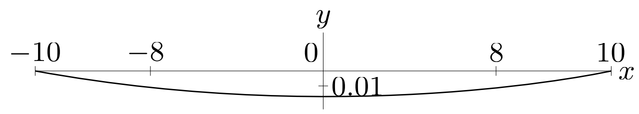
$$\cos(\alpha) + \sin(270^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) + \cos(270^\circ - \alpha - 90^\circ) = \cos(\alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) - \cos(\alpha) = 0$$

f) Es ist

$$\sin^2(-x) + \cos^2(x) + \frac{1}{\tan^2(x)} = \sin^2(x) + \cos^2(x) + \frac{1}{\sin^2(x)/\cos^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$
$$= \frac{1}{\sin^2(x)} .$$

Lösung von Aufgabe 6

Im folgenden Diagramm ist ein günstiges Koordinatensystem eingezeichnet, wobei Meter als Längeneinheiten benutzt (und weggelassen) werden. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich in der Mitte der unteren Kante des nicht durchgebogenen Balkens. Nach dem Durchbiegen befinden sich die Nullstellen der parabelförmigen, unteren Balkenkante mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ bei $x = -10$ und $x = 10$, und die maximale Durchbiegung entspricht dem Betrag des y-Achsenabschnitts, d.h. dem Wert $|f(0)|$.



Die Funktion $y = f(x)$ hat wegen den Nullstellen bei $x = -10$ und $x = 10$ die Form

$$y = f(x) = a \cdot (x+10)(x-10) = a\left(x^2 - 100\right) ,$$

mit dem reellen Parameter a, welcher die vertikale Streckung/Stauchung der Parabel beschreibt. Zur Bestimmung von a nutzen wir die bekannte Durchbiegung des Balkens bei $x = -8$ und $x = 8$:

$$f(8) = a(64 - 100) = -36a = -1/100$$

und damit $a = 1/3600$ (dasselbe Resultat für a erhalten wir mit $f(-8) = -1/100$). Die Funktionsgleichung der Parabel lautet also

$$y = f(x) = \frac{1}{3600}\left(x^2 - 100\right)$$

mit dem y-Achsenabschnitt $f(0) = -1/36$. Die maximale Durchbiegung des Balkens beträgt somit $1/36$ m (≈ 2.8 cm).

Lösung von Aufgabe 7

Wir messen die Temperatur in Grad Celsius und die Zeit in Stunden und lassen bei den Berechnungen die Einheiten weg. Da die Anfangstemperatur der Flüssigkeit gleich 50 ist und sich die Temperatur jede Stunde halbiert, hängt die Temperatur T folgendermassen von der Zeit t ab:

$$T(t) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t .$$

Um den Zeitpunkt zu finden, zu welchem die Temperatur auf 5 abgenommen hat, lösen wir die folgende Gleichung nach t auf:

$$\begin{aligned} 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t &= 5 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^t &= \frac{1}{10} \\ t \cdot \ln(1/2) &= \ln(1/10) \\ t &= \frac{\ln(1/10)}{\ln(1/2)} \approx 3.32 \end{aligned}$$

Somit erreicht die Temperatur der Flüssigkeit nach etwa 3.32 Stunden 5° C, das sind etwa 3 Stunden und 19 Minuten.

Lösung von Aufgabe 8

a) Es ist $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, d.h. die Nullstellen der Nenner aller vorhandenen Brüche befinden sich bei $x = -3$ oder $x = 3$. Somit ist der Definitionsbereich der Gleichung $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

   Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x-5}{x+3} &= \frac{2x^2+2x+18}{x^2-9} \\ (2x+1)(x+3) + (3x-5)(x-3) &= 2x^2+2x+18 \\ 5x^2 - 7x + 18 &= 2x^2 + 2x + 18 \\ 3x^2 - 9x = 3x(x-3) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 3 \end{aligned}$$

   Ein Vergleich mit dem Definitionsbereich der Gleichung zeigt, dass $x = 3$ keine Lösung sein kann. Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $L = \{0\}$.

b) In die vorhandenen Terme der Ungleichung dürfen grundsätzlich alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Der Definitionsbereich ist somit $D = \mathbb{R}$.

   Lösung der Ungleichung:

$$\begin{aligned} 3(y-2) &< 2(5-2y) \\ 3y - 6 &< 10 - 4y \\ 7y &< 16 \\ y &< 16/7 \end{aligned}$$

   Ein Vergleich mit dem Definitionsbereich der Gleichung zeigt, dass die Lösungsmenge $L = \{y \in \mathbb{R}; y < 16/7\} = (-\infty, 16/7)$ lautet.

c) In die vorhandenen Terme der Gleichung dürfen grundsätzlich alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Der Definitionsbereich ist somit $D = \mathbb{R}$.

Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} 3\,e^{2-3z}-5 &= 1 \\ 3\,e^{2-3z} &= 6 \\ e^{2-3z} &= 2 \\ 2-3z &= \ln(2) \\ 3z &= 2-\ln(2) \\ z &= \frac{2-\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Definitionsbereich der Gleichung zeigt, dass die Lösungsmenge $L = \left\{\frac{2-\ln(2)}{3}\right\}$ lautet.

d) Die Radikanden (Terme unter dem Wurzelzeichen) dürfen nicht negativ werden. Der Definitionsbereich ist somit $D = \{u \in \mathbb{R};\, u \geq 0\} = [0, \infty)$.

Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{u+1}-\sqrt{u} &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{u+1} &= \sqrt{u}+\frac{1}{2} \\ u+1 &= u+\sqrt{u}+\frac{1}{4} \\ \sqrt{u} &= \frac{3}{4} \\ u &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Die gefundene Lösung liegt in der Definitionsmenge D. Beim Quadrieren einer Gleichung können allerdings zusätzliche (Schein-)Lösungen entstehen. Wir setzen darum $u = 9/16$ zur Probe in die urspüngliche Gleichung ein:

$$\sqrt{\frac{9}{16}+1}-\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}-\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Die ursprüngliche Gleichung ist also erfüllt, und die Lösungsmenge lautet somit $L = \{9/16\}$.

e) In die vorhandenen Terme der Gleichung dürfen grundsätzlich alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Der Definitionsbereich ist somit $D = \mathbb{R}$.

Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sin(v) = \cos\left(\frac{100\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) \quad \text{(Vielfache von } 2\pi = 18\pi/9 \text{ subtrahiert)} \\ &\sin(v) = \sin\left(\frac{10\pi}{9}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &\sin(v) = \sin\left(\frac{29\pi}{18}\right) \\ &\qquad v = \frac{29\pi}{18}+k\cdot 2\pi \quad \text{oder} \quad v = \frac{25\pi}{18}+k\cdot 2\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenützt wurde, dass $\sin(29\pi/18) = \sin(25\pi/18)$, da der Graph der Sinusfunktion achsensymmetrisch bezüglich $3\pi/2 = 27\pi/18$ ist.

Ein Vergleich mit dem Definitionsbereich der Gleichung zeigt, dass die Lösungsmenge

$$L = \left\{v \in \mathbb{R};\, v = \frac{25\pi}{18}+k\cdot 2\pi \text{ oder } v = \frac{29\pi}{18}+k\cdot 2\pi \text{ ,mit } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

lautet.

f) Wegen der Nullstelle des Nenners im Bruchterm ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2w+1}{w-2}\right| &= 2 \\
\frac{2w+1}{w-2} = -2 \quad &\text{oder} \quad \frac{2w+1}{w-2} = 2 \\
2w+1 = -2w+4 \quad &\text{oder} \quad 2w+1 = 2w-4 \\
4w = 3 \quad &\text{oder} \quad 1 = -4 \\
w = 3/4 \quad &\text{oder} \quad w \in \{\}
\end{aligned}$$

Nur die eine Hälfte der Fallunterscheidung führt also auf eine Lösung. Ein Vergleich mit dem Definitionsbereich der Gleichung zeigt, dass die Lösungsmenge $L = \{3/4\}$ lautet.

Lösung von Aufgabe 9

Zur Bestimmung der Lösung bringen wir die quadratische Gleichung zuerst in eine geeignete Form:

$$4x^2 + (1-a)x + 1 = 0\,.$$

Mit der Lösungsformel ergibt sich dann die Lösung

$$x_{1,2} = \frac{-(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 - 16}}{8}\,.$$

Die quadratische Gleichung ist genau dann lösbar in $\mathbb{R}$, wenn in der Lösungsformel der Radikand $(1-a)^2 - 16$ nicht negativ ist. Wir erstellen also eine Ungleichung für den Parameter a und lösen sie nach a auf:

$$\begin{aligned}
(1-a)^2 - 16 &\geq 0 \\
(1-a)^2 &\geq 16 \\
1-a \geq 4 \quad &\text{oder} \quad 1-a \leq -4 \\
a \leq -3 \quad &\text{oder} \quad a \geq 5
\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung ist also genau für $a \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-3, 5)$ lösbar.

Lösung von Aufgabe 10

Wir messen Volumina in Kubikmetern und die Zeit in Stunden und lassen im Folgenden die Einheiten weg. Die gesuchten Zuflüsse pro Stunde durch die beiden Leitungen bezeichnen wir mit x_1 bzw. mit x_2. Aufgrund der zwei Möglichkeiten, das Wasserbecken zu füllen lässt sich folgendes lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten x_1 und x_2 aufstellen:

$$\begin{array}{rcrcr}
5x_1 & + & 4x_2 & = & 120 \\
4x_1 & + & 8x_2 & = & 120
\end{array}$$

Zur Lösung dividieren wir beispielsweise die zweite Gleichung durch 2 und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von der ersten Gleichung. Wir erhalten dann

$$3x_1 = 60 \quad \text{und damit} \quad x_1 = 20\,.$$

Diese Lösung für x_1 lässt sich z.B. in die erste Gleichung einsetzen und führt dann auf

$$5 \cdot 20 + 4x_2 = 100 + 4x_2 = 120 \quad \text{und damit} \quad x_2 = 5\,.$$

Pro Stunde fliessen somit durch den ersten Zufluss 20 m^3 und durch den zweiten Zufluss 5 m^3 Wasser.